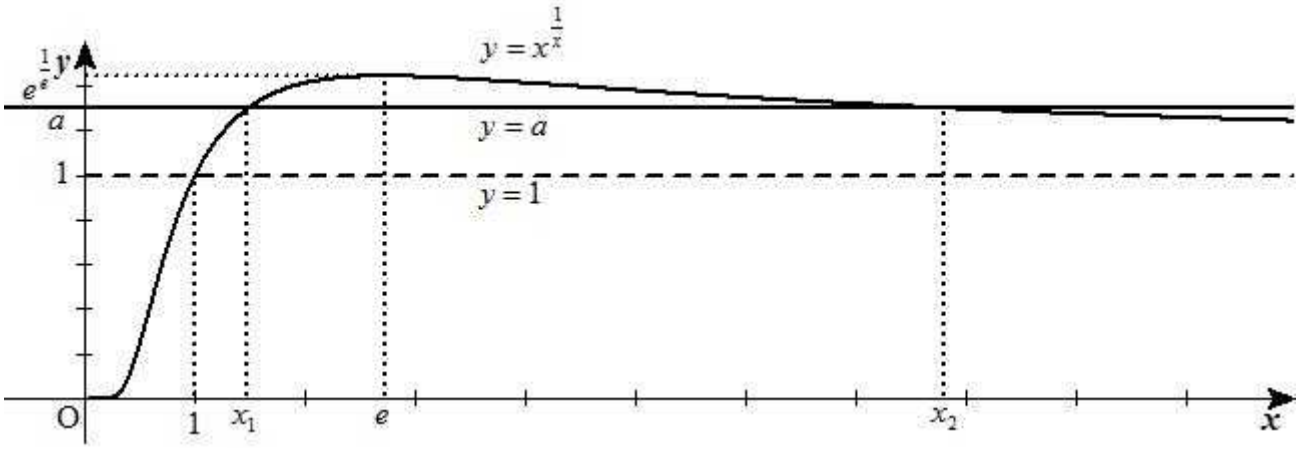
# 関数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ について

まず，$y=f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$のグラフを考える。

$f(x)=e^{\frac{1}{x}\log x}$ とかけるから，$f'(x)=\dfrac{x\cdot\frac{1}{x}-\log x\cdot 1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}=(1-\log x)x^{\frac{1}{x}-2}$

| $x$ | 0 | ••• | $e$ | ••• | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | ＋ | 0 | － | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $e^{\frac{1}{e}}$ | ↘ | 1 |

右の増減表より，$x=e$ のとき極大かつ最大となる。
また，$y=1$ は漸近線。
グラフの概形は次のとおり。




1　$n^{\frac{1}{n}}$ の値が最大となる自然数は $n=3$ である。（数学Ⅲの第 2 回定期試験問題に出題）

（証明）関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ は $n\geqq 3$ のとき減少するので，$3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}>6^{\frac{1}{6}}>\cdots>1$

よって，$n^{\frac{1}{n}}$ の値は $n=3$ のとき最大となる。（終証）

2　$a,b$ を $e$ 以上の数とすると，$a<b$ のとき，$a^b>b^a$ である。

（証明）$y=x^{\frac{1}{x}}$ は減少関数であるから，$e\leqq a<b$ のとき，$a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}}$

この不等式の両辺は正であるから，両辺を $ab$ 乗すると得られる。（終証）

（例）$100^{101}>101^{100}$

3　方程式 $x^{\frac{1}{x}}=a(a>0)$ の実数解の個数は，

$0<a\leqq 1, a=e^{\frac{1}{e}}$ のとき，1 個，

$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき，2 個である。

（証明）グラフより，明らかである。

4　$x>y>0$ のとき，$x^y=y^x$ の整数解は $(x,y)=(4,2)$ のみである。

（証明）$x^y=y^x$ の両辺を $\dfrac{1}{xy}$ 乗すると　$x^{\frac{1}{x}}=y^{\frac{1}{y}}$ となるので，関数 $y=f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ のグラフを考える。

グラフより，$3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}>6^{\frac{1}{6}}>\cdots>1$ であるから明らかである。（終証）

5　$x^y=y^x(x>y>0)$ を満たす実数 $x,y$ の値は，$x>e>y>1$ の範囲に存在する。

（証明）グラフより，$y=x^{\frac{1}{x}}$ と $y=a$ の共有点の $x$ 座標を $x=x_1,x_2$ とすると，$1<x_1<e<x_2$ である。（終証）

6　$a$ を正の実数として，$x=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a+1}, y=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a}$ とおくと，$x^y=y^x$ となる。

（証明）$x=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a+1}=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a}=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)y$ であるから

$$x^y=\left\{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{(a+1)}\right\}^{y}=\left(1+\frac{1}{a}\right)^{(a+1)y}=\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a\left(1+\frac{1}{a}\right)y}=\left(1+\frac{1}{a}\right)^{ax}=\left\{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}\right\}^{x}=y^x$$

よって　$x^y=y^x$　（終証）

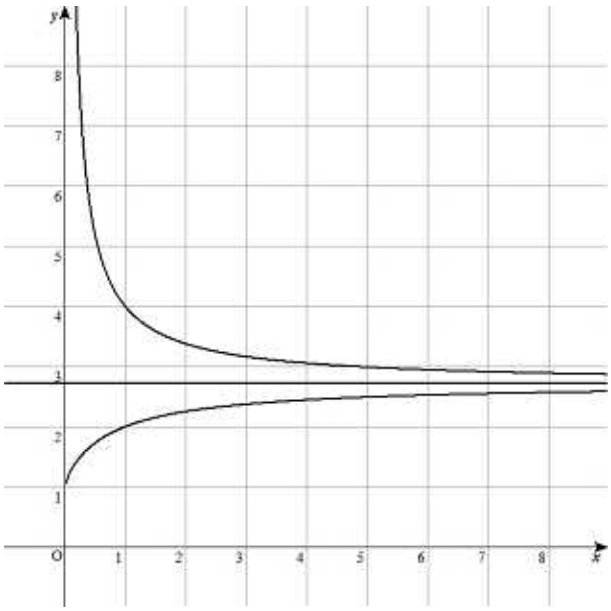
※　$x=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a+1}, y=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a}$ という置き方は，横山直弘君（本校高 3 生）の発見

7　$x>0$ のとき，$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}, y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ のグラフはともに，$\lim\limits_{x\to\infty}y=e=2.718281828459045\cdots$ となる。

（証明）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ は自然対数の底 $e$ の定義より自明。

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e\cdot1=e$$　（終証）

（補足）$x>0$ のとき，グラフより

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

であることが分かる。