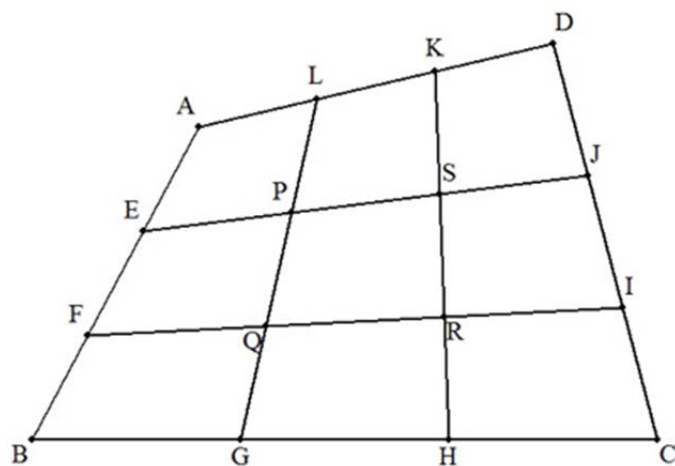


四角形 ABCD において、8 点 E, F, G, H, I, J, K, L は各辺の 3 等分点である。

また、LG と EJ, FI の交点をそれぞれ P, Q,

KH と EJ, FI の交点をそれぞれ S, R とする。

このとき、四角形 PQRS と四角形 ABCD の面積比は $1:9$ となることを証明せよ。



(証明) ここでは、四角形 ABCD の面積を単に ABCD で表す。

[1] $LGHK = \frac{1}{3} ABCD$ の証明

$$LGHK = \angle LGH + \angle LHK$$

$$= \frac{1}{2} \angle LBH + \frac{1}{2} \angle LHD$$

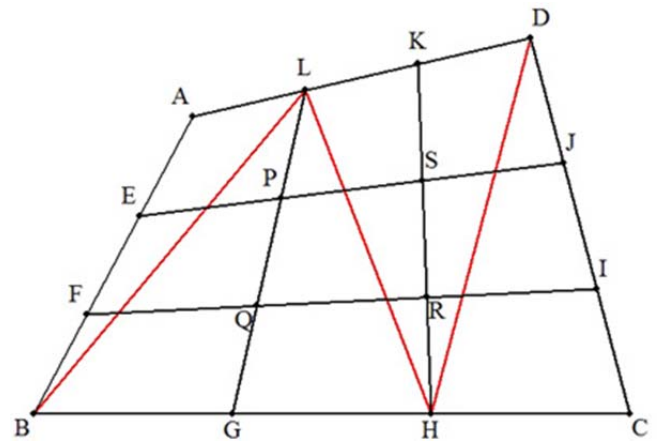
$$= \frac{1}{2} \angle BHD$$

$$= \frac{1}{2} \{ABCD - (\angle ABL + \angle DHC)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{ABCD - (\frac{1}{3} \angle ABD + \frac{1}{3} \angle DBC)\}$$

$$= \frac{1}{2} (ABCD - \frac{1}{3} ABCD)$$

$$= \frac{1}{3} ABCD \quad (\text{終証})$$



[2] $LP : GP = 1 : 2$ の証明

$$EL = \frac{1}{3} BD, EL \parallel BD \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$GJ = \frac{2}{3} BD, GJ \parallel BD \quad \cdots \textcircled{2}$$

① ②より $EL \parallel GJ$ であるから $\angle PLE \sim \angle PGJ$ である。

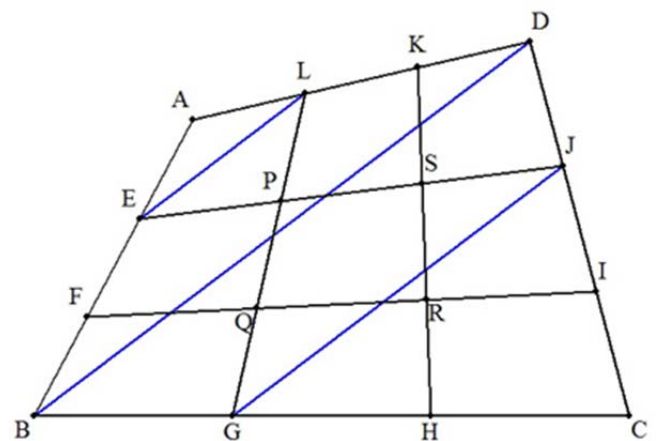
$$LP : GP = LE : GJ = \frac{1}{3} BD : \frac{2}{3} BD = 1 : 2 \quad (\text{終証})$$

同様に、 $LQ : GQ = 2 : 1$ となるので、2点 P, Q は LG の 3 等分点となる。

同様に、2点 S, R は KH の 3 等分点となる。

$$[1] \text{の定理より} \quad PQRS = \frac{1}{3} LGHK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} ABCD = \frac{1}{9} ABCD$$

よって 四角形 PQRS : 四角形 ABCD = 1 : 9 (終証)



(2011/10/19 時岡)