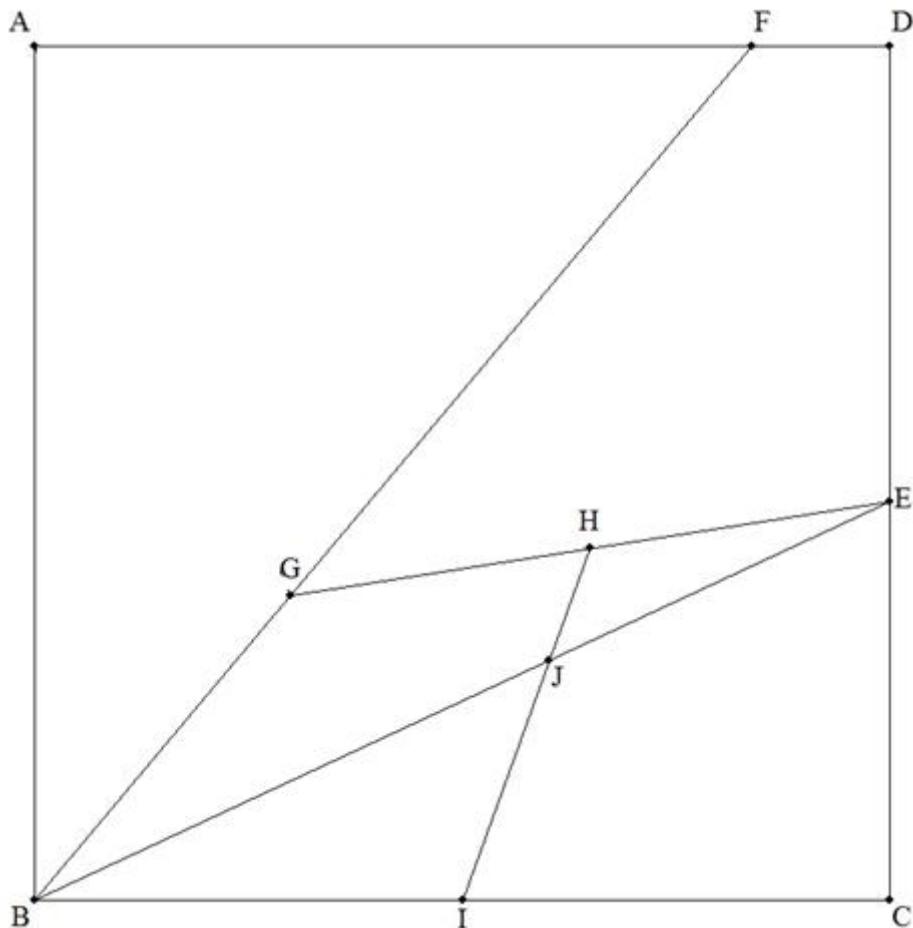


正方形 ABCD の CD, DA 上あるいはその延長上にそれぞれ点 E, F を $\angle CBE = \angle EBF$ となるようにとる。また, FB 上に点 G を, $FA = FG$ となるようにとり, 点 H, I はそれぞれ GE, BC の中点, BE と HI の交点を J とする。このとき,

(1) $\angle CBE = 25^\circ$ のとき, $\angle BJI$ の大きさを求めよ。

(2) $\angle CBE$ が 0° から 90° まで変化すると, 点 J はどのような軌跡を描くか。

(2011/9/13 時岡作)



(1) $\angle BCE$ を、点 B を中心に反時計回りに 90° 回転させ、 E は L に C は A に移るものとする。

$\angle CBE = 25^\circ$ であるから、

$\angle CEB = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

$= \angle FLB \cdots \textcircled{1}$

$\angle FBC = 2\angle EBC = 2 \times 25^\circ$

$= 50^\circ = \angle BFL$ (錯角)

$\triangle FLB$ において、

$\angle FBL = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ)$

$= 65^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より、 $\angle FLB = \angle FBL$

$\triangle FLB$ は二等辺三角形となるの

で、 $FL = FB$

これと $FA = FG$ (仮定) より、

$CE = AL = GB$

よって、 $GB = EC$

四角形 $GBCE$ において、 $GB = EC$, H, I はそれぞれ GE, BC の中点であるから、 BG, IH のなす角と CE, IH のなす角は等しい。(※)

$\angle BJI = x$ とおくと、 $\angle JIC = x + 25^\circ$, $\angle BIH = 180^\circ - (x + 25^\circ) = 155^\circ - x$

(※) より、 $\angle GBC + \angle BIH = \angle HIC + \angle BGE$ であるから

$50^\circ + (155^\circ - x) = (x + 25^\circ) + 90^\circ$

これより $x = 45^\circ \cdots$ (答)

(2) $\angle CBE = y$ とおく。(1) と同様に $GB = EC$ となる。

(※) より、

$\angle GBC + \angle BIH = \angle HIC + \angle BCE$

であるから

$2y + \{180^\circ - (x + y)\} = (x + y) + 90^\circ$

これより $x = 45^\circ$

いま、 AB の中点を K とする。

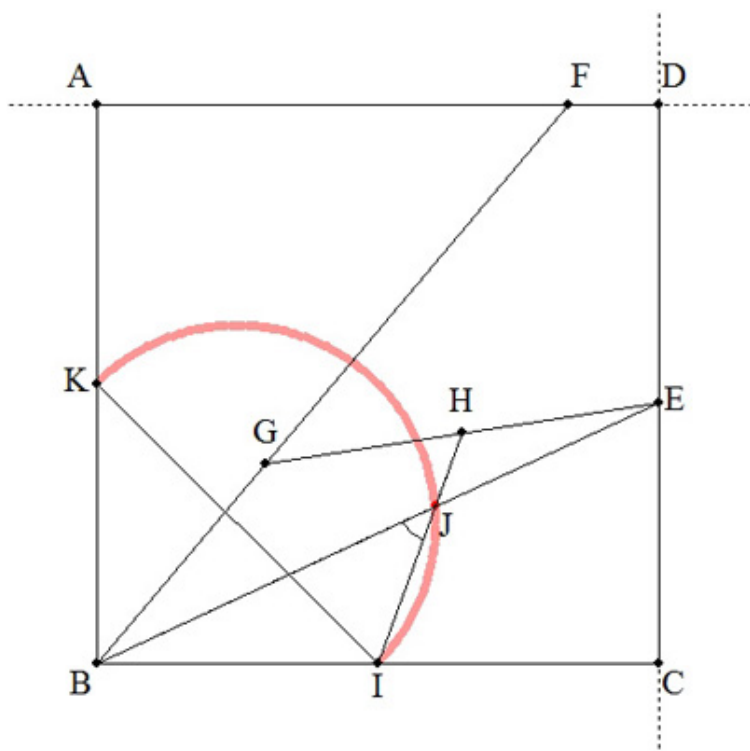
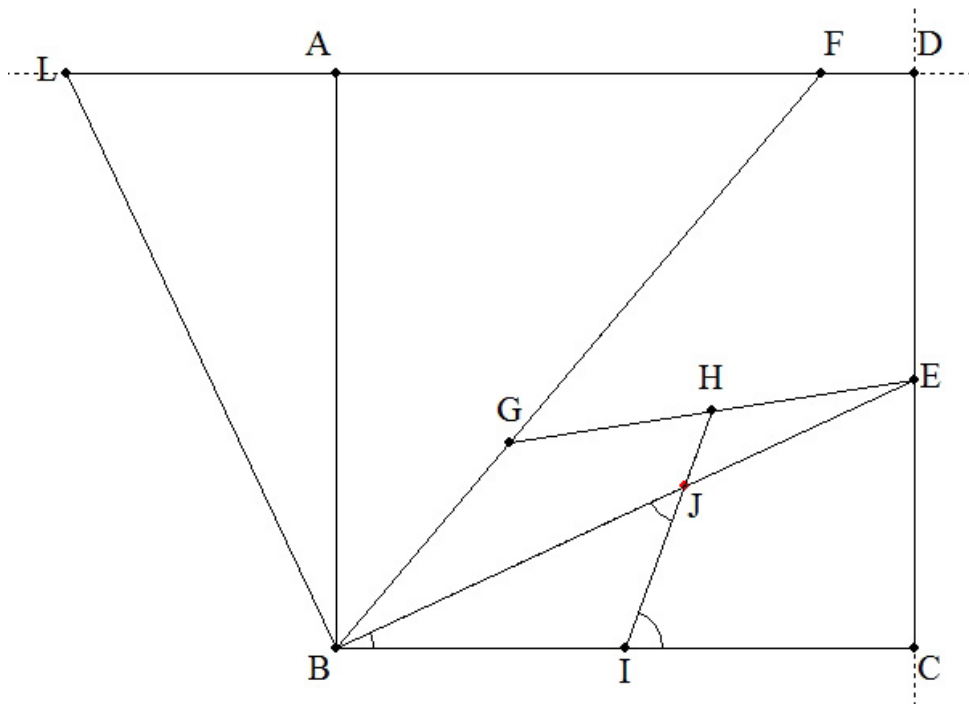
$\angle CBE$ の大きさにかかわらず、 $\angle BJI = 45^\circ$ となり、

$y \rightarrow 0^\circ$ のとき、 $J \rightarrow I$, $y \rightarrow 90^\circ$ のとき、 $J \rightarrow K$ である。

ある。

よって、点 J の軌跡は IK を直径とする半円となる。

$\cdots$ (答)



(※)

四角形 ABCD において、 $AB=DC$ 、 AD 、 BC の中点をそれぞれ M 、 N とするとき、 BA 、 NM のなす角と CD 、 NM のなす角は等しい。

(証明)

対角線 AC の中点を L とする。

中点連結定理より

$$NL \parallel BA, \quad NL = \frac{1}{2} BA \cdots \textcircled{1}$$

$$ML \parallel DC, \quad ML = \frac{1}{2} DC \cdots \textcircled{2}$$

仮定より $AB=DC$ であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より $NL=ML$

$\triangle LMN$ は二等辺三角形であるから、

$$\angle LNM = \angle LMN \cdots \textcircled{3}$$

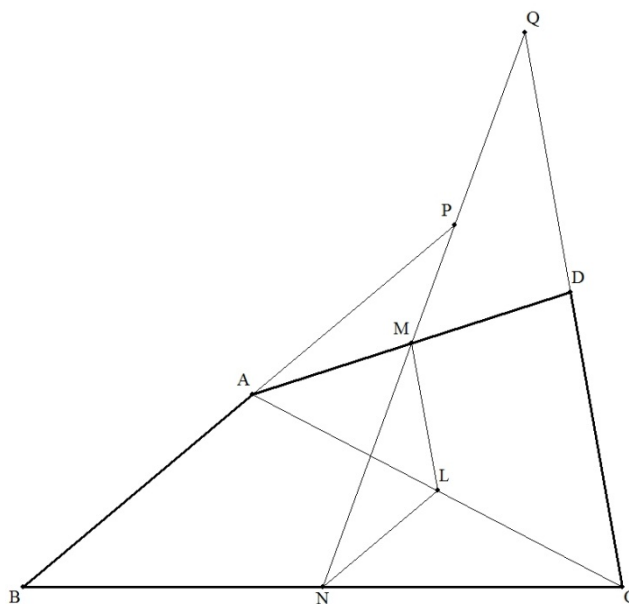
BA 、 NM の交点を P 、 CD 、 NM の交点を Q とする。

$NL \parallel BP$ より $\angle BPN = \angle LNM$ (錯角)

$ML \parallel QC$ より $\angle CQM = \angle LMN$ (同位角)

$\textcircled{3}$ より、 $\angle BPN = \angle CQN$

よって、 BA 、 NM のなす角と CD 、 NM のなす角は等しい。(終証)



(補足)

このことから、次が成り立つ。

$$(1) \quad \angle ABN + \angle MNB = \angle MNC + \angle DCN$$

$$(2) \quad \angle ABN < \angle DCN \text{ のとき, } \angle MNC = 90^\circ - \frac{1}{2} (\angle DCN - \angle ABN)$$

(2011/10/1 時岡)

(2012/1/5 時岡)