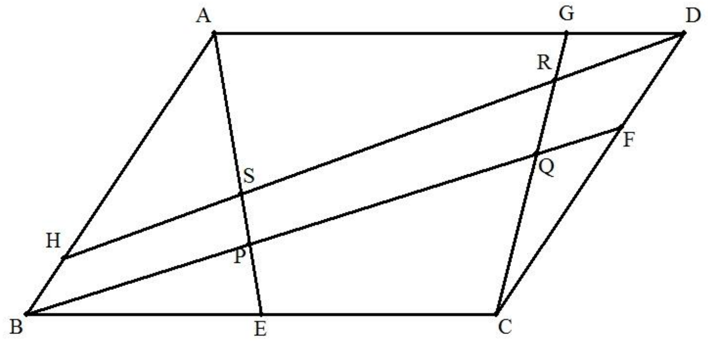
▱ABCD において，BE＝a BC（$0<a<1$），CF＝b CD（$0<b<1$），DG＝c DA（$0<c<1$），AH＝d AB（$0<d<1$），AE と BF の交点を P，BF と CG の交点を Q，CG と DH の交点を R，DH と AE の交点を S とするとき，四角形 PQRS／▱ABCD の値を求めよ。



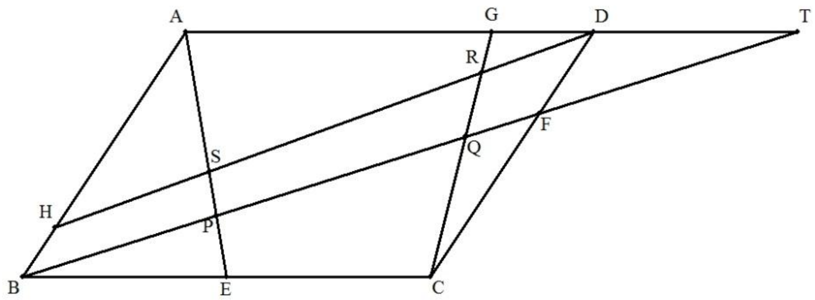
（解）平行四辺形 ABCD＝S とおく。

四角形 PQRS＝S －（△PAB＋△QBC＋△RCD＋△SDA）…①

である。

まず，△PAB の面積から考える。

BF と AD の交点を T とおく。



△BCF∽△TDF であるから

BC：TD＝b ：（1－b ）より TD＝$\dfrac{1-b}{b}$ BC

AT＝AD＋DT＝BC＋$\dfrac{1-b}{b}$ BC＝$\dfrac{1}{b}$ BC

△BEP∽△TAP であるから

EP：AP＝BE：TA＝a BC：$\dfrac{1}{b}$ BC＝ab ：1

△PAB＝$\dfrac{1}{ab+1}$ △ABE＝$\dfrac{1}{ab+1}\times a$ △ABC＝$\dfrac{a}{ab+1}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{a}{2(ab+1)}S$

次に，△QBC，△RCD，△SDA についても同様に

△QBC＝$\dfrac{b}{2(bc+1)}S$，△RCD＝$\dfrac{c}{2(cd+1)}S$，△SDA＝$\dfrac{d}{2(da+1)}S$

となる。これらを①に代入すると

四角形 PQRS＝$S-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ab+1}+\dfrac{b}{bc+1}+\dfrac{c}{cd+1}+\dfrac{d}{da+1}\right)S$

よって，四角形 PQRS／$S=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ab+1}+\dfrac{b}{bc+1}+\dfrac{c}{cd+1}+\dfrac{d}{da+1}\right)$…（答）

【具体例】

(1) $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{3},c=\dfrac{1}{4},d=\dfrac{1}{5}$ のとき，四角形 PQRS／$S=\dfrac{181}{429}$

(2) $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{2}{3},c=\dfrac{1}{4},d=\dfrac{4}{5}$ のとき，四角形 PQRS／$S=\dfrac{23}{168}$

（2011/10/4　時岡）