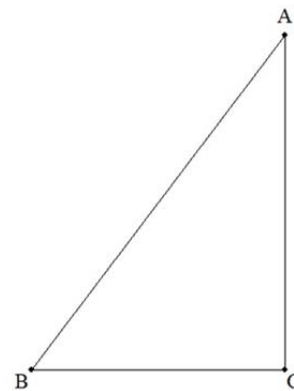


$C=90^\circ$ の直角三角形 ABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$) について,
 BC を軸として 1 回転してできる立体の体積を V_1 , 表面積を S_1 ,
 CA を軸として 1 回転してできる立体の体積を V_2 , 表面積を S_2 ,
 AB を軸として 1 回転してできる立体の体積を V_3 , 表面積を S_3 とする。
 このとき, 次の比を求めよ。

(1) $V_1 : V_2 : V_3$

(2) $S_1 : S_2 : S_3$



(解)

(1) まず, $V_1 = \frac{1}{3}\pi b^2 a = \frac{1}{3}\pi ab^2$, $V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 b$ である。

次に, C から AB に垂線 CH を引く。

$\triangle ACH \sim \triangle ABC$ より

$$AC : AB = AH : AC, \quad b : c = AH : b, \quad \therefore AH = \frac{b^2}{c}$$

$$CH : BC = AC : AB, \quad CH : a = b : c, \quad \therefore CH = \frac{ab}{c}$$

また, $BH = AB - AH = c - \frac{b^2}{c}$ である。

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \frac{b^2}{c} + \frac{1}{3}\pi \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \left(c - \frac{b^2}{c}\right) = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 b^2}{c}$$

よって

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi ab^2 : \frac{1}{3}\pi a^2 b : \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 b^2}{c} = bc : ca : ab \dots \text{(答)}$$

(2) $S_1 = \pi b^2 + \pi c^2 \times \frac{2\pi b}{2\pi c} = \pi b(b+c),$

同様に $S_2 = \pi a(a+c),$

$$S_3 = \pi b^2 \times \frac{2\pi \times \frac{ab}{c}}{2\pi b} + \pi a^2 \times \frac{2\pi \times \frac{ab}{c}}{2\pi a} = \frac{\pi ab(a+b)}{c}$$

よって

$$S_1 : S_2 : S_3 = \pi b(b+c) : \pi a(c+a) : \frac{\pi ab(a+b)}{c} = bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b) \dots \text{(答)}$$

【例】

(1) $BC=3$, $CA=4$, $AB=5$ のとき,

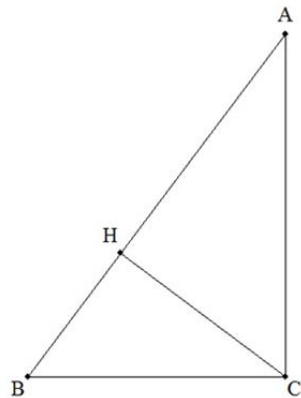
$$V_1 : V_2 : V_3 = 20 : 15 : 12,$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 15 : 10 : 7$$

(2) $BC=5$, $CA=12$, $AB=13$ のとき,

$$V_1 : V_2 : V_3 = 156 : 65 : 60,$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 130 : 39 : 34$$



(2011/10/12 時岡)