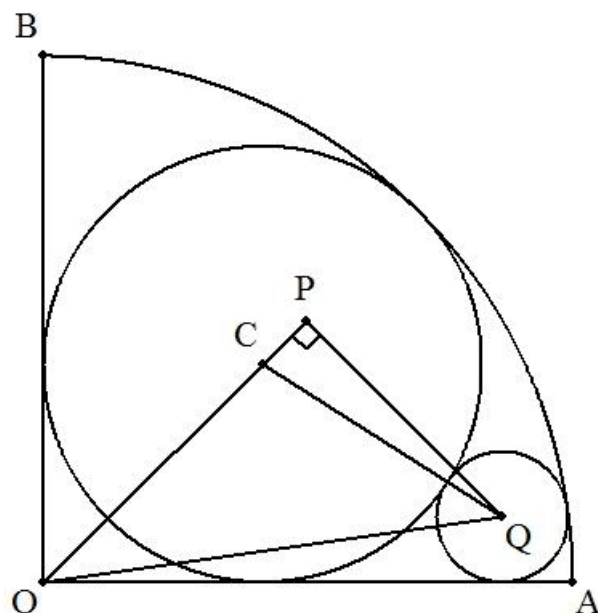


1/4 円 OAB に円 C が内接している。図のように 1/4 円に内接し円 C に外接する円の中心 Q から OC に下ろした垂線の足を P とするとき、 $OQ+QP=2OP$ を証明せよ。



(証)

$\frac{1}{4}$ 円 O, 円 C, 円 Q の半径をそれぞれ a, R, r とし,

円 C, 円 Q が OA と接する点をそれぞれ K, H とすると, 図の作り方から

$$a = (1 + \sqrt{2})R$$

$$KH = \sqrt{(R+r)^2 + (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

$$OQ = a - r = (1 + \sqrt{2})R - r$$

であるから, $\triangle OHQ$ において

$$OH^2 + QH^2 = OQ^2$$

$$\therefore (R + 2\sqrt{Rr})^2 + r^2 = ((1 + \sqrt{2})R - r)^2$$

$R \neq 0$ より

$$(1 + \sqrt{2})R - 2\sqrt{Rr} - (3 + \sqrt{2})r = 0$$

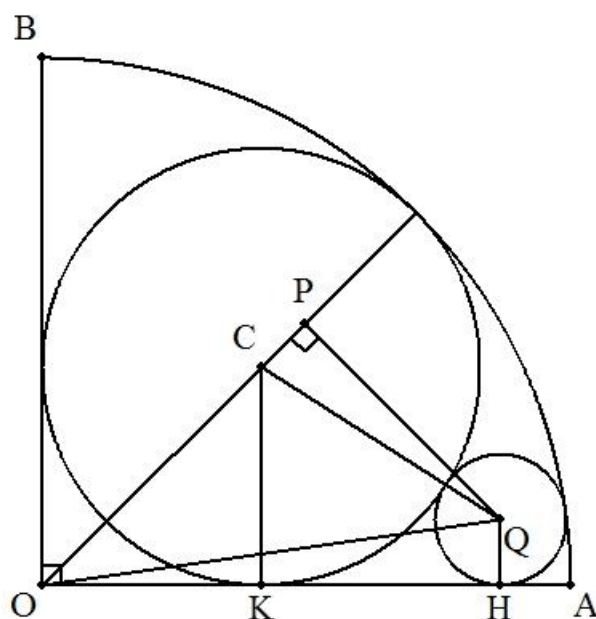
$$(\sqrt{R} + \sqrt{r})\{(1 + \sqrt{2})\sqrt{R} - (3 + \sqrt{2})\sqrt{r}\} = 0$$

$\sqrt{R} + \sqrt{r} \neq 0$ より

$$\frac{R}{r} = \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^2 = (2\sqrt{2} - 1)^2 = 9 - 4\sqrt{2}$$

ここで, $\angle COQ = \alpha$ ($0 < \alpha < 45^\circ$) とおくと, $\angle QOH = 45^\circ - \alpha$ であるから

$$\tan(45^\circ - \alpha) = \frac{r}{R + 2\sqrt{Rr}} = \frac{1}{\frac{R}{r} + 2\sqrt{\frac{R}{r}}} = \frac{1}{9 - 4\sqrt{2} + 2(2\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{7} \quad \dots \textcircled{1}$$



$$\text{また, } \tan(45^\circ - \alpha) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 45^\circ \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ , } \textcircled{2} \text{より } \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{3}{4}, \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$OQ + QP = OQ + OQ \sin \alpha = OQ(1 + \sin \alpha) = OQ \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} OQ = 2OQ \times \frac{4}{5} = 2OQ \cos \alpha = 2OP$$

よって $OQ + QP = 2OP$ (終証)

(補足)

$$R = (\sqrt{2} - 1)a, r = \frac{5\sqrt{2} - 1}{49}a$$

$\triangle OPQ$ は, $3:4:5$ の直角三角形

(2012/6/10 時岡)