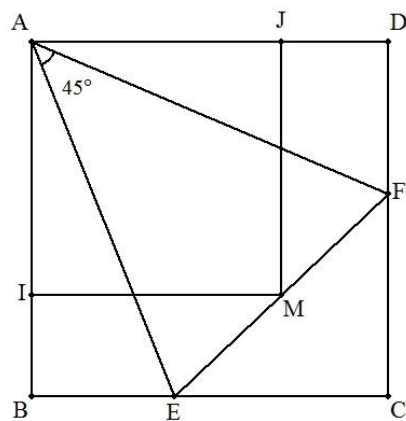


正方形 ABCD の辺 BC, CD 上にそれぞれ点 E, F を $\angle EAF = 45^\circ$ であるようにとり, EF の中点 M から AB, AD への垂線の足を I, J とすれば, 長方形 AIMJ の面積はもとの正方形の面積の半分に等しい。



(証明) $AB = AD = a$, $BE = x$, $DF = y$ とおくと,

$EC = a - x$, $FC = a - y$ である。

また, $\angle EAF = 45^\circ$ であるから, $BE + DF = EF$,

したがって, $EF = x + y$ である。

$\angle ECF = 90^\circ$ であるから, $EC^2 + FC^2 = EF^2$

よって

$$(a - x)^2 + (a - y)^2 = (x + y)^2$$

$$2a^2 - 2a(x + y) + x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$xy + a(x + y) = a^2$$

$$(x + a)(y + a) = 2a^2 \cdots \textcircled{1}$$

E, F からそれぞれ AD, AB へ下ろした垂線の足を K, L とすると,

$EK = BA = a$, $FL = DA = a$ である。

台形 BEFL において, M は EF の中点で, $BE \parallel IM \parallel LF$ であるから

$$IM = \frac{1}{2} (BE + LF) = \frac{1}{2} (x + a)$$

同様に台形 DFEK において

$$JM = \frac{1}{2} (DF + KE) = \frac{1}{2} (y + a)$$

したがって

$$IM \cdot JM = \frac{1}{4} (x + a)(y + a)$$

$$\text{よって, } \textcircled{1} \text{ から } IM \cdot JM = \frac{1}{2} a^2$$

すなわち, 長方形 AIMJ の面積はもとの正方形の面積の半分に等しい。(終証)

