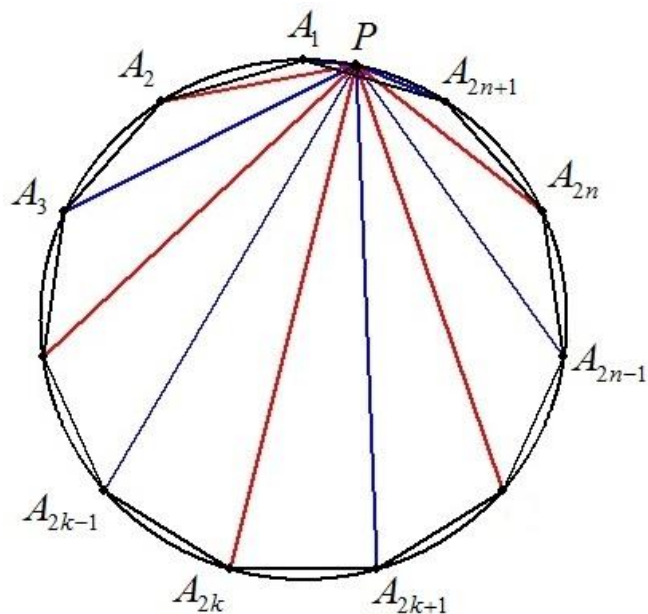


円に正 $2n+1$ 角形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ が内接し、劣弧 A_1A_{2n+1} 上に点 P をとると
 $PA_1+PA_3+\cdots+PA_{2n+1}=PA_2+PA_4+\cdots+PA_{2n}$
 となることを証明せよ。



(証) $A_1A_2=a$, $A_1A_3=b$, $PA_i=p_i$ とおく。
 次の $2n+1$ 個の四角形に、順次トレミーの定理を適用する。
 四角形 $PA_1A_2A_3$ について、 $a(p_1+p_3)=bp_2$
 四角形 $PA_3A_4A_5$ について、 $a(p_3+p_5)=bp_4$
 四角形 $PA_5A_6A_7$ について、 $a(p_5+p_7)=bp_6$

 四角形 $PA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$ について、 $a(p_{2n-1}+p_{2n+1})=bp_{2n}$
 四角形 $PA_1A_{2n}A_{2n+1}$ について、 $ap_1+bp_{2n+1}=ap_{2n}$
 四角形 $PA_2A_3A_4$ について、 $bp_3=a(p_2+p_4)$
 四角形 $PA_4A_5A_6$ について、 $bp_5=a(p_4+p_6)$
 四角形 $PA_6A_7A_8$ について、 $bp_7=a(p_6+p_8)$

 四角形 $PA_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ について、 $bp_{2n-1}=a(p_{2n-2}+p_{2n})$
 四角形 $PA_1A_2A_{2n+1}$ について、 $ap_{2n+1}+bp_1=ap_2$
 これら $2n+1$ 個の等式を辺々加えると、
 $(2a+b)(p_1+p_3+\cdots p_{2n+1})=(2a+b)(p_2+p_4+\cdots p_{2n})$
 $\therefore p_1+p_3+\cdots p_{2n+1}=p_2+p_4+\cdots p_{2n}$
 よって
 $PA_1+PA_3+\cdots+PA_{2n+1}=PA_2+PA_4+\cdots+PA_{2n}$ ■

(2013/10/30 時岡)