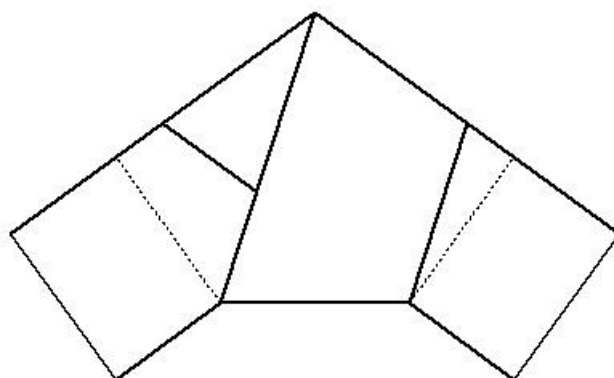


【正五角形の結び目】

幅が a の紙で右の図のように結びを作る。

- (1) このときできる正五角形の1辺の長さを求めよ。
- (2) 図の点線のところで切り落とし、残った部分をほどいて広げたとき、紙の長さを求めよ。



(解)

- (1) 図のように記号をつけると、 $FC = a$ である。

いま、 $BC = t$ 、 $BF = s$ とおく。

$$CA = BE = 2BF + FG = 2s + t$$

$\triangle BCF \sim \triangle CAH$ であるから

$$BF : BH = BC : CA$$

$$s : \frac{1}{2}t = t : (2s + t)$$

$$s(2s + t) = \frac{1}{2}t^2$$

$$4s^2 + 2st - t^2 = 0$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}t$$

$s > 0$ より

$$s = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}t \dots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle BCF$ は直角三角形であるから $BC^2 = BF^2 + FC^2$

$$t^2 = s^2 + a^2$$

これに①を代入すると

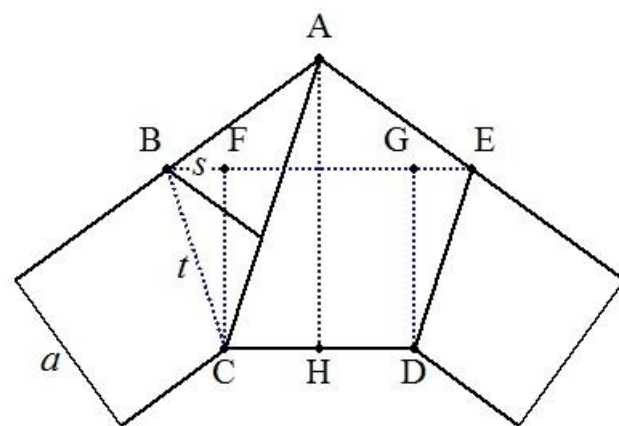
$$t^2 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}t \right)^2 + a^2$$

$$t^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2} a^2 = \frac{2(5 - \sqrt{5})}{5} a^2$$

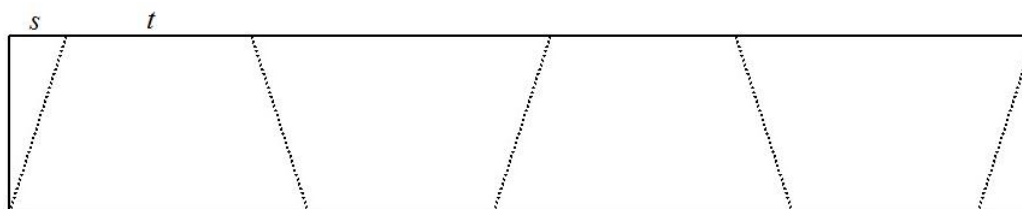
$t > 0$ より

$$\therefore t = \frac{\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}}{5} a \dots (\text{答})$$

$$\left(\frac{\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}}{5} = 1.051462224 \right)$$



(2) 広げると次のようになる。



線分の長さを(1)の記号で表すと，紙の長さは

$$5s + 4t = 5 \times \frac{\sqrt{5}-1}{4}t + 4t = \frac{11+5\sqrt{5}}{4}t = \frac{11+5\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5}a = \frac{\sqrt{5(85+38\sqrt{5})}}{5}a \dots (\text{答})$$

(= 5.830447378a)

(補足) 正五角形の結びを作るためには，幅の約 6 倍の長さが必要である。

(2012/9/18 時岡)