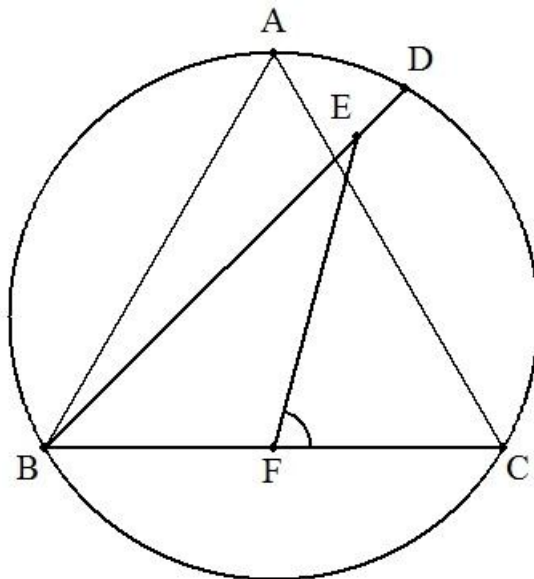


正三角形 ABC の外接円の劣弧 AC 上に点 D を弧 AD : 弧 DC = $m:n$ となるようにとる。次に、BD 上に点 E を、 $DA/2=DE$ となるようにとり、BC の中点を F とする。

- (1) $m=1, n=3$ のとき、 $\angle EFC$ の大きさを求めよ。
 (2) $\angle EFC=57^\circ$ となるときの m, n の値を求めよ。ただし、 m, n は最小の正の整数とする。



(解)

- (1) $\angle ADE = \angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$ で $AD : DE = 2 : 1$ より、
 $\angle AED = 90^\circ \quad \therefore \angle AEB = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

また、AF は正三角形 ABC の中線であるから、

$$\angle AFB = 90^\circ \dots \textcircled{2}$$

①、②より 4 点 A, B, F, E は AB を直径とする同一円周上の点となる。

$$\text{ここで、} \angle FEB = \angle FAB = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

また、 $\angle ABC = 60^\circ$ で、弧 AD : 弧 DC = $m:n$ より

$$\angle EBF = \angle DBC = 60^\circ \times \frac{n}{m+n} \text{ であるから}$$

$$\angle EFC = \angle FEB + \angle EBF = 30 + 60^\circ \times \frac{n}{m+n} \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $m=1, n=3$ とおくと、

$$\angle EFC = 30^\circ + 60^\circ \times \frac{3}{1+3} = 75^\circ \dots (\text{答})$$

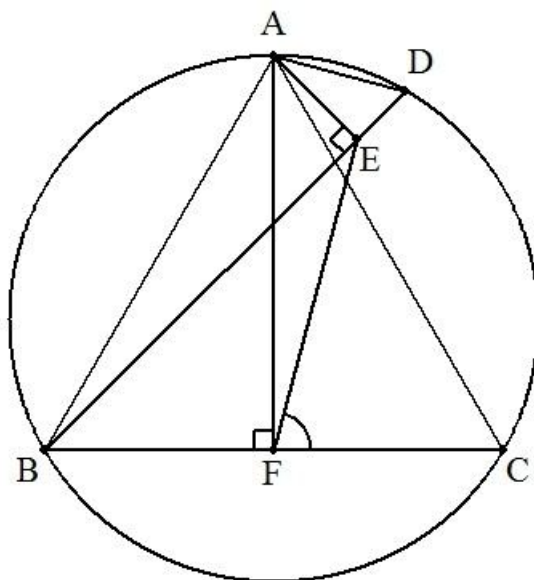
- (2) $\angle EBF = \theta$ とおくと、③より

$$30 + 60^\circ \times \frac{n}{m+n} = \theta$$

$$\frac{n}{m+n} = \frac{\theta - 30^\circ}{60^\circ}, \frac{m+n}{n} = \frac{60^\circ}{\theta - 30^\circ}, \frac{m}{n} = \frac{90^\circ - \theta}{\theta - 30^\circ} \text{ となり } m:n = (90^\circ - \theta):(\theta - 30^\circ)$$

ここで、 $\theta = 57^\circ$ とおくと

$$m:n = (90^\circ - 57^\circ):(57^\circ - 30^\circ) = 11:9 \dots (\text{答})$$



(別解) (1) 四角形 ABCD にトレミーの定理を適用すると、

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot BD \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ は正三角形より、 $AB = BC = AC$ であるから、 $\textcircled{1}$ は、

$$AD + DC = BD \cdots \textcircled{2}$$

となる。

DE を 2 : 1 に外分する点を G とすると、

$$DA = DG \text{ より、} \textcircled{2} \text{ から } GB = DC \cdots \textcircled{3}$$

GC の中点を H とする。

$\triangle CGB$ に中点連結定理を適用すると

$$HF \parallel GB \cdots \textcircled{4}, HF = GB/2 \cdots \textcircled{5}$$

同様に、 $\triangle GCD$ に中点連結定理を適用すると

$$HE \parallel CD \cdots \textcircled{6}, HE = CD/2 \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{5}$ 、 $\textcircled{7}$ より $HF = HE \cdots \textcircled{8}$ となるので

$\triangle HEF$ は二等辺三角形であるから

$$\angle HFE = \angle HEF \cdots \textcircled{9}$$

FE と CD の交点を I とすると

$$\angle BEF = \angle HFE \quad (\because \textcircled{4} \text{ より 錯角が等しい。})$$

$$= \angle HEF \quad (\because \textcircled{9})$$

$$= \angle CIF \quad (\textcircled{6} \text{ より 同位角が等しい。})$$

$\triangle EBF$ と $\triangle IFC$ において、 $\angle BEF = \angle CIF$ より

$$\angle EBF + \angle EFB = \angle IFC + \angle ICF \cdots \textcircled{10}$$

ここで、 $\angle EFC = \theta$ とおくと、 $\angle EFB = 180^\circ - \theta$,

$$\text{弧 AD} : \text{弧 DC} = m : n \text{ より、} \angle EBF = \angle DBC = 60^\circ \times \frac{n}{m+n},$$

$$\text{同様に、} \angle DCA = \angle DBA = 60^\circ \times \frac{m}{m+n} \text{ より、} \angle DCF = \angle DCA + \angle ACB = 60^\circ \times \frac{m}{m+n} + 60^\circ$$

これらを $\textcircled{10}$ に代入すると

$$60^\circ \times \frac{n}{m+n} + (180^\circ - \theta) = \theta + (60^\circ \times \frac{m}{m+n} + 60^\circ)$$

$$\theta = 60^\circ + 30^\circ \times \frac{n-m}{m+n} = 30^\circ \times \frac{m+3n}{m+n} = 30^\circ + 60^\circ \times \frac{n}{m+n} \cdots \textcircled{11}$$

ここで、 $m=1, n=3$ とおくと、

$$\angle EFC = 30^\circ + 60^\circ \times \frac{3}{1+3} = 75^\circ \cdots (\text{答})$$

(2) $\textcircled{11}$ から

$$\frac{n}{m+n} = \frac{\theta - 30^\circ}{60^\circ}, \frac{m+n}{n} = \frac{60^\circ}{\theta - 30^\circ}, \frac{m}{n} = \frac{90^\circ - \theta}{\theta - 30^\circ} \text{ となり}$$

$$m : n = (90^\circ - \theta) : (\theta - 30^\circ) \cdots \textcircled{12}$$

となる。

$\theta = 57^\circ$ とおくと、 $\textcircled{12}$ より

$$m : n = (90^\circ - 57^\circ) : (57^\circ - 30^\circ) = 11 : 9 \cdots (\text{答})$$

