

$a+b+c=0$ のとき、次の等式を証明せよ。

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9$$

山梨高等工業学校 (1923 年～1943 年)

好学社発行 (昭和 38 年) の数学 I 代数編の教科書 P.82 B 問題に採録

(証 1)

$$\begin{aligned} & \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \\ &= \frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{abc} \\ &= \frac{(b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + bc(b-c)}{abc} \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \\ &= \frac{a(c-a)(a-b) + b(a-b)(b-c) + c(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad \because a+b+c=0 \text{ より } a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b \\ &= \star \end{aligned}$$

ここで、 $x+y+z=0$ であるから、 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ である。

$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$ より

$$\star = \frac{-3abc - 6abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \dots \textcircled{2}$$

よって、①、②より

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \times \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 9 \quad (\text{終証}) \end{aligned}$$

(証 2)

$b-c=x, c-a=y, a-b=z$ とおくと,

$x+y+z=0$ であるから, $x^3+y^3+z^3=3xyz \cdots \textcircled{1}$

である。

$\because x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$ より

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$=1+\frac{x}{a}\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)+1+\frac{y}{b}\left(\frac{a}{x}+\frac{c}{z}\right)+1+\frac{z}{c}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$$

$$=3+\frac{x}{a}\cdot\frac{bz+cy}{yz}+\frac{y}{b}\cdot\frac{az+cx}{xz}+\frac{z}{c}\cdot\frac{ay+bx}{xy}=\star$$

ここで,

$$bz+cy$$

$$=b(a-b)+c(c-a)$$

$$=ab-b^2+c^2-ac$$

$$=a(b-c)-(b+c)(b-c)$$

$$=(a-b-c)(b-c)$$

$$=2ax$$

$$az+cx$$

$$=a(a-b)+c(b-c)$$

$$=a^2-ab+bc-c^2$$

$$=b(c-a)-(c+a)(c-a)$$

$$=(b-c-a)(c-a)$$

$$=2by$$

$$ay+bx$$

$$=a(c-a)+b(b-c)$$

$$=ac-a^2+b^2-bc$$

$$=c(a-b)-(a+b)(a-b)$$

$$=(c-a-b)(a-b)$$

$$=2cz$$

であるから

$$\star=3+\frac{x}{a}\cdot\frac{2ax}{yz}+\frac{y}{b}\cdot\frac{2by}{xz}+\frac{z}{c}\cdot\frac{2cz}{xy}$$

$$=3+\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

$$=3+\frac{2\cdot 3xyz}{xyz} \quad \because \textcircled{1} \text{ より}$$

$$=9 \quad (\text{終証})$$

(2013/7/3 時岡)
(2013/7/10 時岡)