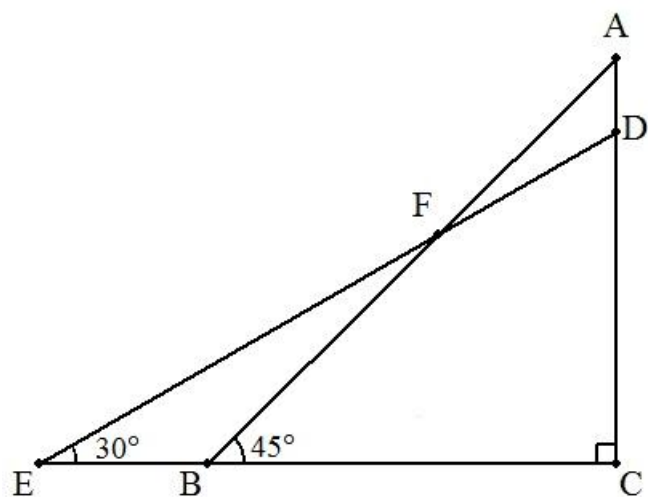


一組の 2 つの三角定規を図のように直角の部分で重ねるとき、2 つの三角形の重なった部分（四角形 BCDF）の面積を求めよ。ただし、2 つの三角形の辺のうち、等しい辺の長さを a とする。すなわち、 $AB=EC=a$ である。



(解) 直角三角形の 3 辺の比から、 $AC=AB \div \sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$DC=EC \div \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ である。

F から BC, CD に下ろした垂線の足をそれぞれ G, H とする。

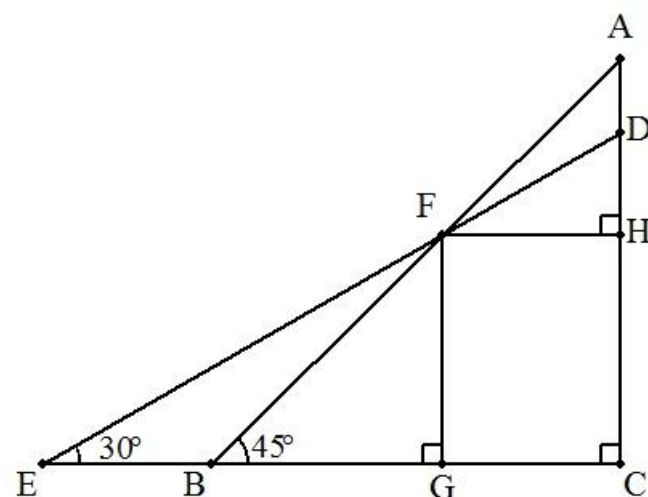
いま、 $FG=HC=x$ とおく。

$\triangle FEG$ において、 $EG : FG = \sqrt{3} : 1$ より、 $EG = \sqrt{3}x$

$\therefore GC = EC - EG = a - \sqrt{3}x$

また、 $GC = FH = AH$ であるから、 $AH = a - \sqrt{3}x$

$AC = AH + HC$ より、 $\frac{a}{\sqrt{2}} = (a - \sqrt{3}x) + x$



$$x = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}a \dots \textcircled{1}$$

求める面積を S とおくと、

$$S = \triangle DEC - \triangle FEB = \frac{1}{2} EC \cdot DC - \frac{1}{2} EB \cdot FG$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} (\sqrt{3}x - x)x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} x^2$$

ここで、 $\textcircled{1}$ より $x^2 = \frac{(3-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{3})}{8} a^2 = \frac{6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{4} a^2$ であるから、

$$S = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{4} a^2$$

$$= \frac{-9+6\sqrt{2}-5\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{24} a^2 (= 0.2300819a^2) \dots (\text{答})$$

【例】 $a=8$ のとき、 $S = \frac{8}{3} (-9+6\sqrt{2}-5\sqrt{3}+6\sqrt{6})$