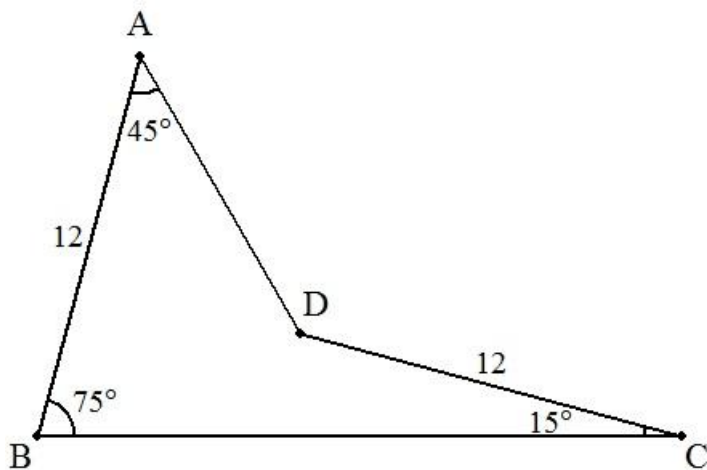


四角形 ABCD において、 $AB=CD=12$ ，
 $\angle DAB=45^\circ$ ， $\angle ABC=75^\circ$ ， $\angle BCD=15^\circ$
 であるとき、四角形の面積を求めよ。



(解 1)

CD の延長と AB との交点を H とすると、 $\angle CHB=90^\circ$ であるから、 $\triangle AHD$ は直角二等辺三角形となる。
 いま、 $AH=HD=x$ とおくと、 $BH=12-x$ ， $CH=12+x$ であるから、

$\triangle HBC$ において、 $\tan 15^\circ = \frac{12-x}{12+x}$ より、

$$x = \frac{12(1 - \tan 15^\circ)}{1 + \tan 15^\circ}$$

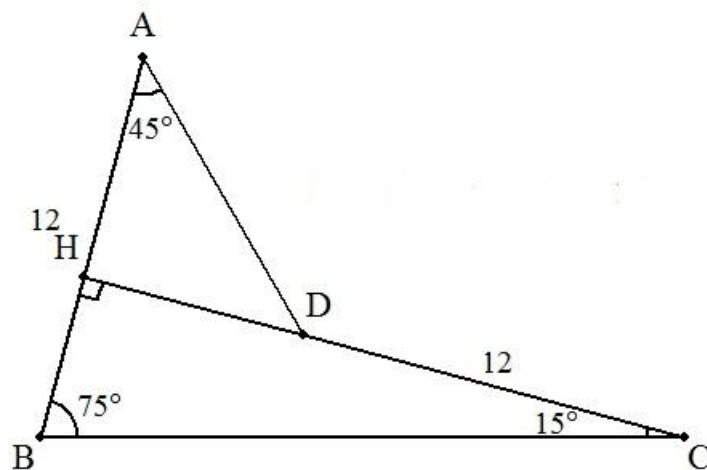
$$\text{ここで、} \tan 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 - \sqrt{3}$$

であるから

$$x = \frac{12\{1 - (2 - \sqrt{3})\}}{1 + (2 - \sqrt{3})} = 4\sqrt{3}$$

$$S = \triangle AHD + \triangle HBC$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(4\sqrt{3})^2 + \frac{1}{2}(12 + 4\sqrt{3})(12 - 4\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2}(4\sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} \cdot 12^2 - \frac{1}{2}(4\sqrt{3})^2 \\ &= 72 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(解 2)

AD の延長と BC との交点を E, D から BC に下ろした垂線の足を F とする。∠BEA=60° であるから, ∠ABE に正弦定理を適用すると,

$$\frac{BE}{\sin 45^\circ} = \frac{12}{\sin 60^\circ} \text{ より } BE = 4\sqrt{6}$$

∠CDF において,

$$DE = 12 \sin 15^\circ \text{ より,}$$

$$FE = \frac{DF}{\sqrt{3}} = \frac{12 \sin 15^\circ}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \sin 15^\circ$$

また, $FC = 12 \cos 15^\circ$ であるから

$$EC = FC - FE = 12 \cos 15^\circ - 4\sqrt{3} \sin 15^\circ = -4\sqrt{3}(\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ) = -4\sqrt{3} \times 2 \sin(15^\circ - 60^\circ) = 4\sqrt{6}$$

よって

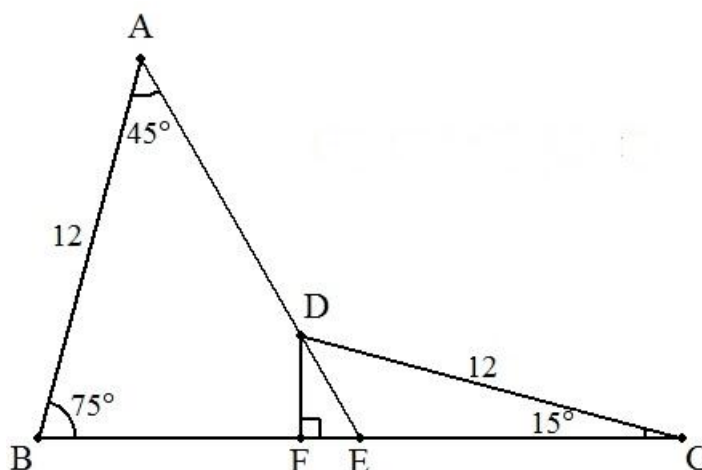
$$S = \triangle ABE + \triangle CDE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{6} \sin 75^\circ + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{6} \sin 15^\circ$$

$$= 24\sqrt{6}(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$$

$$= 24\sqrt{6} \times \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)$$

$$= 72 \quad \dots(\text{答})$$



【誤答の不思議】

∠ABD が直角二等辺三角形になる (誤認) ので,

$$BD = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

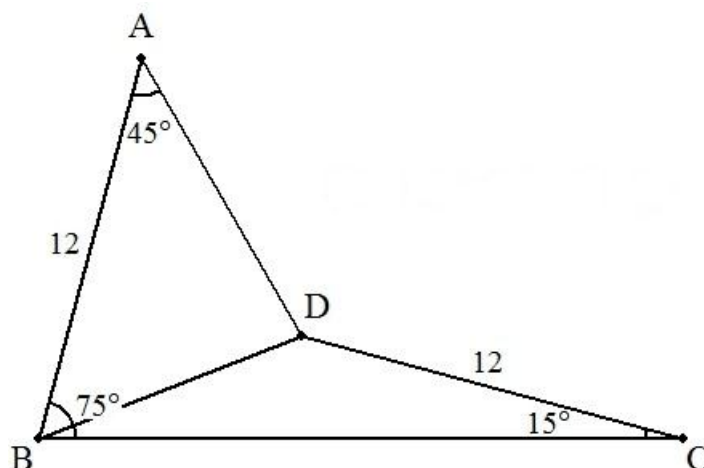
$$\angle ABD = 45^\circ, \angle DBC = 30^\circ \text{ より } \angle CDB = 135^\circ$$

$$S = \triangle ABD + \triangle DBC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{2} \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{2} \sin 135^\circ$$

$$= 36\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 72 \quad \dots(\text{答})$$



【参考文献】

1. 初等数学の会通信第 17 号 ワンポイントパズルから (2002 年 10 月 1 日, 松田康雄発行)
2. 初等数学の会通信第 19 号 17 号のワンポイントパズルについて (2003 年 8 月 1 日, 松田康雄発行)

(2012/2/4 時岡)