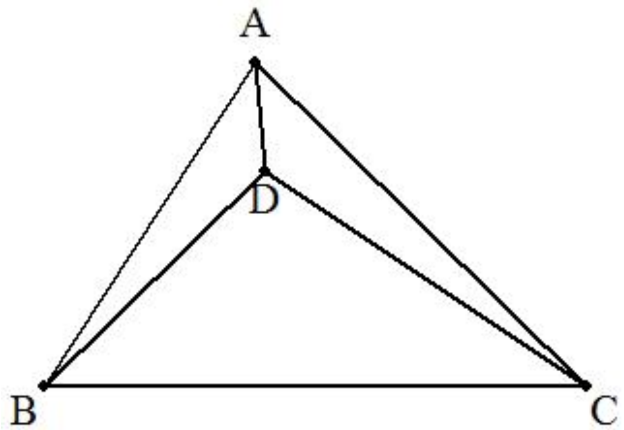
△ABC 内に点 D をとる。
BC＝7，CA＝6，AB＝5，BD＝4，CD＝5 のとき，
AD の長さを求めよ。



（解）AD＝ x ，∠BDC＝ α ，∠CDA＝ β ，∠ADB＝ γ とおく。
△DBC，△DCA，△DAB に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot5\cdot4}=-\frac{1}{5},\cos\beta=\frac{x^2+5^2-6^2}{2x\cdot5}=\frac{x^2-11}{10x},\cos\gamma=\frac{4^2+x^2-5^2}{2\cdot4x}=\frac{x^2-9}{8x}$$

$\alpha+\beta=360°-\gamma$ より， $\cos(\alpha+\beta)=\cos\gamma$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta$$

両辺を 2 乗すると

$$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2=\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

これに， $\cos\alpha=-\frac{1}{5},\cos\beta=\frac{x^2-11}{10x},\cos\gamma=\frac{x^2-9}{8x}$ を代入すると

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{x^2-11}{10x}\right)^2+\left(\frac{x^2-9}{8x}\right)^2=1+2\left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{x^2-11}{10x}\right)\left(\frac{x^2-9}{8x}\right)$$

両辺に $(40x)^2$ をかけると

$$(8x)^2+\{4(x^2-11)\}^2+\{5(x^2-9)\}^2=(40x)^2-8(x^2-11)(x^2-9)$$
$$49x^4-2498x^2+4753=0$$
$$(x+7)(x-7)(49x^2-97)=0$$

図より， $0<x<2$ であるから

$$\therefore x=\frac{\sqrt{97}}{7}(=1.406979686)\cdots$$ （答）

（2012/2/18　時岡）

（別解）AD＝xとおく。六斜術

$$a^2x^2\left(b^2+c^2+y^2+z^2-a^2-x^2\right)+b^2y^2\left(c^2+a^2+z^2+x^2-b^2-y^2\right)+c^2z^2\left(a^2+b^2+x^2+y^2-c^2-z^2\right)$$
$$=a^2b^2c^2+a^2y^2z^2+b^2z^2x^2+c^2x^2y^2$$

に$a=7,b=6,c=5,y=4,z=5$を代入すると

$$7^2x^2\left(6^2+5^2+4^2+5^2-7^2-x^2\right)+6^2\cdot4^2\left(5^2+7^2+5^2+x^2-6^2-4^2\right)+5^2\cdot5^2\left(7^2+6^2+x^2+4^2-5^2-5^2\right)$$
$$=7^2\cdot6^2\cdot5^2+7^2\cdot4^2\cdot5^2+6^2\cdot5^2x^2+5^2x^24^2$$
$$49x^4-2498x^2+4753=0$$
$$(x+7)(x-7)\left(49x^2-97\right)=0$$

図より，$0<x<2$であるから

$$\therefore x=\frac{\sqrt{97}}{7}(=1.406979686)\cdots$$（答）

（2012/3/11　時岡）