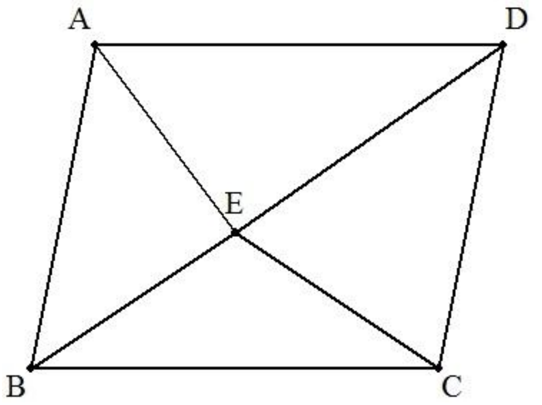
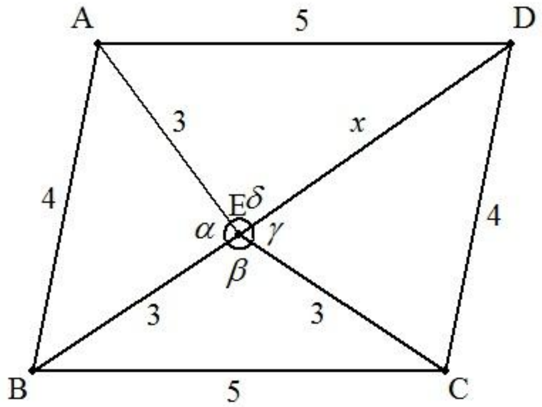
平行四辺形 ABCD 内に点 E をとる。
AB＝4，BC＝5，AE＝BE＝CE＝3 のとき，
DE の長さを求めよ。



（解）DE＝x，∠AEB＝α，∠BEC＝β，
∠CED＝γ，∠DEA＝δ とおく。
⊿AEB，⊿BEC，⊿CED，⊿DEA に余弦定理を
適用すると



$$\cos\alpha=\frac{3^2+3^2-4^2}{2\cdot3\cdot3}=\frac{1}{9},\cos\beta=\frac{3^2+3^2-5^2}{2\cdot3\cdot3}=-\frac{7}{18},$$

$$\cos\gamma=\frac{x^2+3^2-4^2}{2x\cdot3}=\frac{x^2-7}{6x},\cos\delta=\frac{3^2+x^2-5^2}{2\cdot3x}=\frac{x^2-16}{6x}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$ であるから，$\alpha+\delta=360^\circ-(\beta+\gamma)$

$$\cos(\alpha+\delta)=\cos\{360^\circ-(\beta+\gamma)\}=\cos(\beta+\gamma)$$

$$\cos\alpha\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos\alpha\cos\delta-\cos\beta\cos\gamma=\sin\alpha\sin\delta-\sin\beta\sin\gamma$$

両辺を 2 乗すると

$$(\cos\alpha\cos\delta-\cos\beta\cos\gamma)^2=\sin^2\alpha\sin^2\delta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta+\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 等に注意して，移項すると

$$(\cos\alpha\cos\delta-\cos\beta\cos\gamma)^2-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\delta)-(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)=-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

さらに，両辺を 2 乗すると，

$$\{(\cos\alpha\cos\delta-\cos\beta\cos\gamma)^2-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\delta)-(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)\}^2$$
$$=4(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\delta)$$

これに，$\cos\alpha=\dfrac{1}{9},\cos\beta=-\dfrac{7}{18},\cos\gamma=\dfrac{x^2-7}{6x},\cos\delta=\dfrac{x^2-16}{6x}$ を代入すると，

$$\left[\left\{\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{x^2-16}{6x}\right)-\left(-\frac{7}{18}\right)\left(\frac{x^2-7}{6x}\right)\right\}^2-\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x^2-16}{6x}\right)^2\right\}-\left\{1-\left(-\frac{7}{18}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x^2-7}{6x}\right)^2\right\}\right]^2$$

$$=4\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^2\right\}\left\{1-\left(-\frac{7}{18}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x^2-7}{6x}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x^2-16}{6x}\right)^2\right\}$$

両辺に，$9^4(6x)^4$ をかけ，整理すると

$$(169x^4-9242x^2+25489)^2=22000(x^4-50x^2+49)(x^4-68x^2+256)$$

展開して，整理すると

$$6561x^8-527796x^6+12519846x^4-116234676x^2+373721121=0$$

$$729(x-3)^2(x+3)^2\left(9x^4-562x^2+6329\right)=0$$

図より，$3<x<5$ であるから

$9x^4-562x^2+6329=0$，　$x^2=\dfrac{281\pm 20\sqrt{55}}{9}$，　$x=\pm\dfrac{\sqrt{281\pm 20\sqrt{55}}}{3}$

$3<x<5$ であるから

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{281-20\sqrt{55}}}{3}\left(=3.83950272\right)\cdots$（答）

（2012/2/21　時岡）