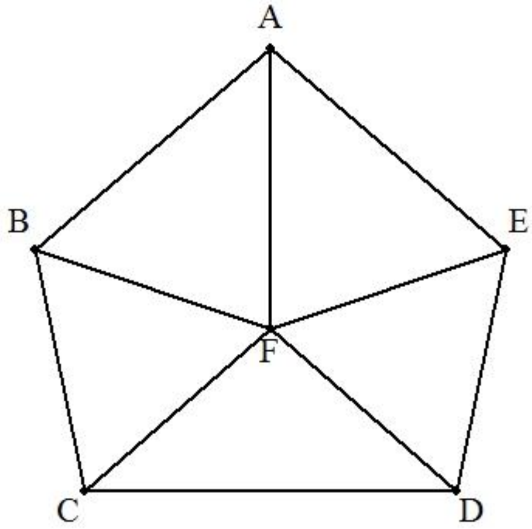
五角形 ABCDE 内に点 F をとる。
AB＝AE＝5,　BC＝DE＝4，CD＝6,
BF＝CF＝DF＝EF＝4 のとき，
AF の長さを求めよ。



（解）AF＝x，∠AFB＝∠AFE＝α，∠CFD＝β とおく。

$$\cos\alpha=\frac{4^2+x^2-5^2}{2\cdot4x}=\frac{x^2-9}{8x},\cos\beta=\frac{4^2+4^2-6^2}{2\cdot4\cdot4}=-\frac{1}{8},\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}\quad\cdots①$$

2α＋β＝360°－60°×2＝240° であるから，$2\alpha=240°-\beta$ より，$\cos2\alpha=\cos(240°-\beta)$

$2\cos^2\alpha-1=\cos240°\cos\beta+\sin240°\sin\beta$

これに①を代入すると，

$$2\left(\frac{x^2-9}{8x}\right)^2-1=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\left(\frac{x^2-9}{8x}\right)^2=\frac{17-3\sqrt{21}}{32}$$

図より，$\cos\alpha=\dfrac{x^2-9}{8x}>0$ であるから

$$\frac{x^2-9}{8x}=\sqrt{\frac{17-3\sqrt{21}}{32}}$$

$$x^2-\sqrt{2\left(17-3\sqrt{21}\right)}x-9=0$$

$$x=\frac{\sqrt{2\left(17-3\sqrt{21}\right)}\pm\sqrt{2\left(17-3\sqrt{21}\right)-4\cdot1\cdot(-9)}}{2}=\frac{\sqrt{2\left(17-3\sqrt{21}\right)}\pm\sqrt{2\left(35-3\sqrt{21}\right)}}{2}$$

$x>0$ より

$$x=\frac{\sqrt{2\left(17-3\sqrt{21}\right)}+\sqrt{2\left(35-3\sqrt{21}\right)}}{2}(=4.534976078)$$

（2012/2/22　時岡）