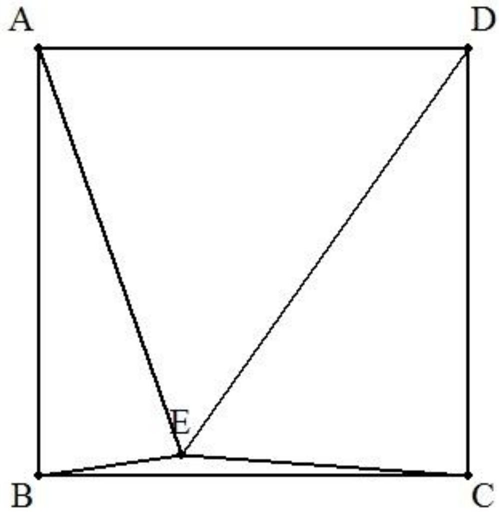
正方形 ABCD 内に点 E をとる。
AE＝3，BE＝1，CE＝2 のとき，
AB の長さを求めよ。



（解）一般に，長方形 ABCD と点 E について，$AE^2+CE^2=BE^2+DE^2$ が成り立つ（注）ので，

$3^2+2^2=1^2+DE^2$，DE＞0 より　$DE=2\sqrt{3}$

正方形の 1 辺の長さを x，∠AEB＝α，∠BEC＝β，∠CED＝γ，∠DEA＝δ とおく。
⊿AEB，⊿BEC，⊿CED，⊿DEA に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha=\frac{1^2+3^2-x^2}{2\cdot1\cdot3}=\frac{10-x^2}{6},\cos\beta=\frac{2^2+1^2-x^2}{2\cdot2\cdot1}=\frac{5-x^2}{4},\cos\gamma=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2-x^2}{2\cdot2\sqrt{3}\cdot2}=\frac{16-x^2}{8\sqrt{3}},$$

$$\cos\delta=\frac{3^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-x^2}{2\cdot3\cdot2\sqrt{3}}=\frac{21-x^2}{12\sqrt{3}}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$ であるから，$\alpha+\beta=360^\circ-(\gamma+\delta)$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\gamma+\delta)$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\delta=\sin\alpha\sin\beta-\sin\gamma\sin\delta$$

両辺を 2 乗すると

$$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\delta)^2=\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta+\sin^2\gamma\sin^2\delta$$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 等に注意して，移項すると

$$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\delta)^2-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\delta)=-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

さらに，両辺を 2 乗すると，

$$\left\{(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\delta)^2-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\delta)\right\}^2$$
$$=4(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\delta)$$

これに，$\cos\alpha=\dfrac{10-x^2}{6},\cos\beta=\dfrac{5-x^2}{4},\cos\gamma=\dfrac{16-x^2}{8\sqrt{3}},\cos\delta=\dfrac{21-x^2}{12\sqrt{3}}$ を代入すると，

$$\left[\left\{\left(\frac{10-x^2}{6}\right)\left(\frac{5-x^2}{4}\right)-\left(\frac{16-x^2}{8\sqrt{3}}\right)\left(\frac{21-x^2}{12\sqrt{3}}\right)\right\}^2-\left\{1-\left(\frac{10-x^2}{6}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{5-x^2}{4}\right)^2\right\}-\left\{1-\left(\frac{16-x^2}{8\sqrt{3}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{21-x^2}{12\sqrt{3}}\right)^2\right\}\right]^2$$

$$=4\left\{1-\left(\frac{10-x^2}{6}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{5-x^2}{4}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{16-x^2}{8\sqrt{3}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{21-x^2}{12\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$

展開して整理すると

$$\frac{3025x^4\left(2x^4-26x^2+73\right)}{2985984}=0$$

⊿EBC より， $2<x<3$ であるから

$$x=\sqrt{\frac{13+\sqrt{23}}{2}}\left(=2.982937438\right)$$

（補足）一般に，点 E が正方形 ABCD の内部にあり，AE＝ p ，BE＝ q ，CE＝ r $\left(\frac{p\sim r}{\sqrt{2}}<q<\frac{p+r}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，

$$\text{AB}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{p^2+r^2+\sqrt{\left(p+r\right)^2-2q^2}\sqrt{2q^2-\left(p-r\right)^2}\right\}}$$

（2012/2/26　時岡）