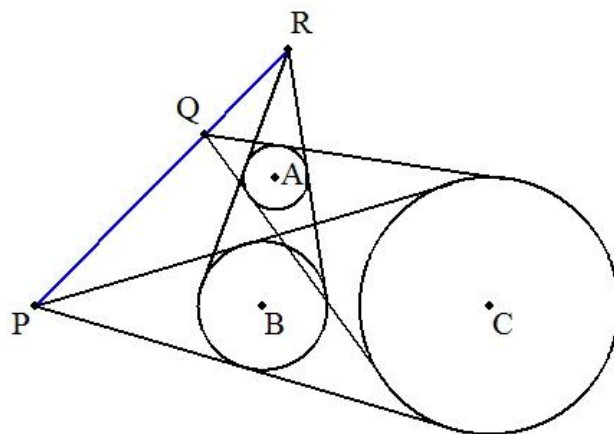


- (1) 3 円 A, B, C について, 2 円ずつの共通外接線の交点 P, Q, R は 1 直線上にあることを証明せよ。



(証)

- (1) 3 円 A (r_1), B (r_2), C (r_3) について, 図のように,

円の中心 B, C から接線に垂線を下ろし, その足をそれぞれ E, G とする。

$$\angle PBE \sim \angle PCG \text{ より, } \frac{BP}{PC} = \frac{r_2}{r_3} \dots \textcircled{1}$$

同様に

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{r_3}{r_1} \dots \textcircled{2}$$

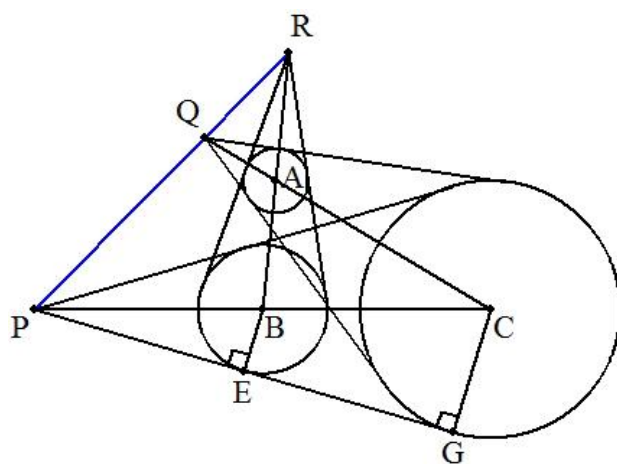
$$\frac{AR}{RB} = \frac{r_1}{r_2} \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③を辺々掛け合わせると

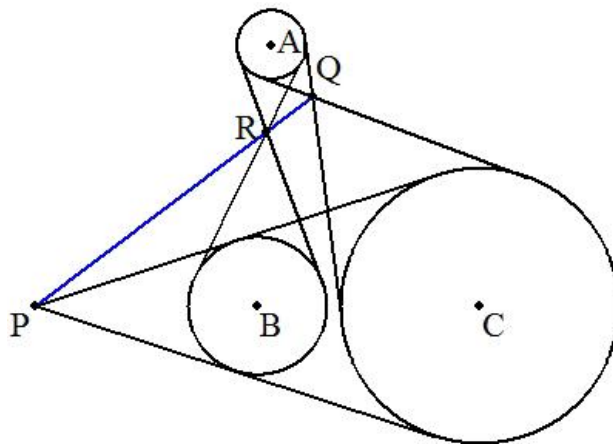
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1$$

よって, $\angle RPB$ を QC で切ったとみて Menelaus の定理の逆より, 3 点 P, Q, R は 1 直線上にある。(終証)

(2012/2/17 時岡)



- (2) 3 円 A, B, C について, 2 円 B, C の共通外接線の交点を P, 2 円 C, A の共通内接線の交点を Q, 2 円 A, B の共通内接線の交点を R とすると, 3 点 P, Q, R は 1 直線上にあることを証明せよ。



(2) (1)と同様に

(a) 2 円 B, C について, $\frac{BP}{PC} = \frac{r_2}{r_3} \dots \textcircled{1}$

(b) 2 円 C, A について, $\frac{CQ}{QA} = \frac{r_3}{r_1} \dots \textcircled{2}$

(c) 2 円 A, B について, $\frac{AR}{RB} = \frac{r_1}{r_2} \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③を辺々掛け合わせると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1$$

よって, $\angle QPC$ を AB で切ったとみて Menelaus の定理の逆より, 3 点 P, Q, R は 1 直線上にある。(終証)

(2012/3/6 時岡)