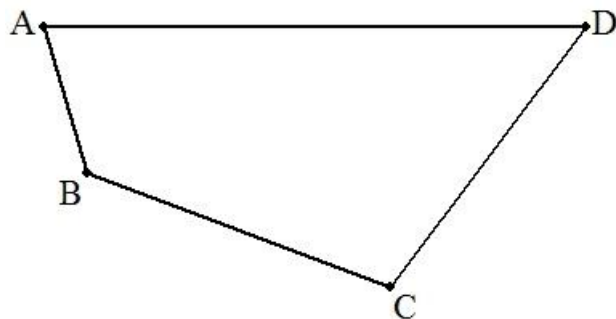


$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ である四角形 $ABCD$ の面積を最大にする DA の長さを x とおく。

(1) x の満たす 3 次方程式を求めよ。

(2) a, b, c, x の正の整数解をいくつか求めよ。ただし,

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0 \text{ とする。}$$



(解)

(1) 四角形 $ABCD$ の面積を S とおく。

(ア) $\angle ABD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ とおくと,

$$S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} aBD \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin \beta$$

ここで, 余弦定理より

$$BD = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta} \text{ であるから}$$

$$S = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta} \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin \beta$$

この式は, β の大きさに関わりなく, $\alpha = 90^\circ$ のとき最大となる。

(イ) 同様に, $\angle ACD = \gamma$, $\angle ABC = \delta$ とおくと,

$$S = \triangle ACD + \triangle ABC = \frac{1}{2} ACc \sin \gamma + \frac{1}{2} ab \sin \delta$$

ここで, 余弦定理より $AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta}$ であるから

$$S = \frac{1}{2} c \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta} \sin \gamma + \frac{1}{2} ab \sin \delta$$

この式は, δ の大きさに関わりなく, $\gamma = 90^\circ$ のとき最大となる。

以上 (ア), (イ) より, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ のとき, S は最大となる。

このとき, 円周角の定理の逆より, 四角形 $ABCD$ は円に内接する。

トレミーの定理より

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

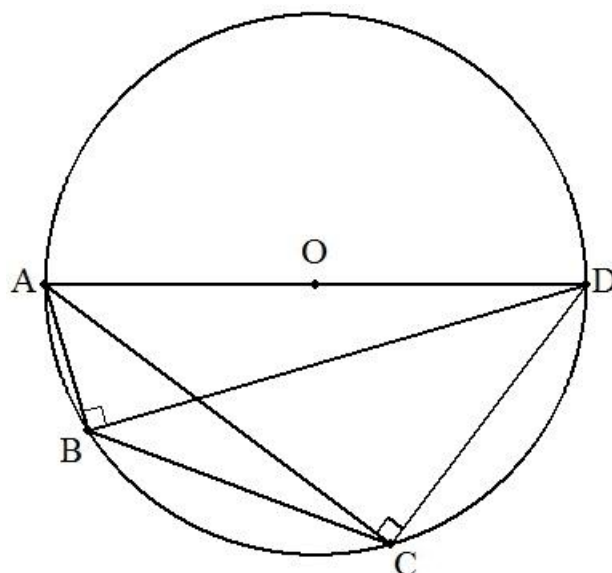
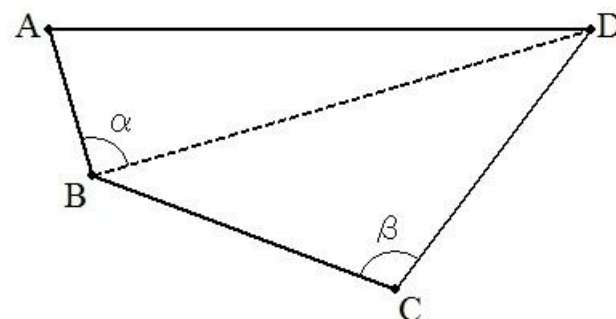
ここで, 三平方の定理より

$$AC = \sqrt{x^2 - c^2}, \quad BD = \sqrt{x^2 - a^2} \text{ であるから}$$

$$ac + bx = \sqrt{x^2 - c^2} \sqrt{x^2 - a^2}$$

両辺を 2 乗し, $x \neq 0$ に注意して整理すると

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0 \cdots (\text{答})$$



(2) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$, $a \leq b \leq c < 30$ の場合の例

a	b	c	x
1	6	6	9
1	13	22	26
2	2	7	8
2	7	11	14
2	9	12	16
3	3	7	9
3	3	17	18
5	5	23	25
6	11	14	21
7	15	15	25
7	15	15	35
7	20	20	32
8	17	22	32
10	10	17	25
11	17	21	33
11	19	26	38
12	12	23	32
17	28	28	49

$a=b=c$ のとき, $x=2a$ である。

(補足) 題意に適する(1)の方程式の解は

$$x = \frac{\sqrt[3]{3(a^2 + b^2 + c^2)} + \sqrt[3]{\left\{9abc + \sqrt{81a^2b^2c^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)^3}\right\}^2}}{\sqrt[3]{9\left\{9abc + \sqrt{81a^2b^2c^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)^3}\right\}}}$$

(2012/3/15 時岡)