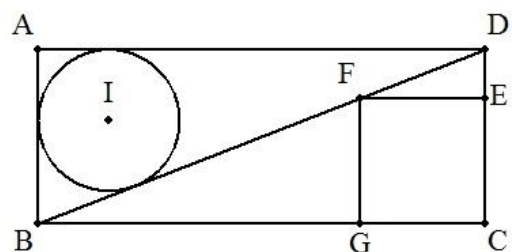


AB=1である長方形 ABCD において、図のように三角形 ABD の内接円 I の面積と三角形 BCD に内接する正方形 CEFG の面積が等しくなるとき、BC の長さを求めよ。ただし、AB<BC とする。



(解) $BC = x (x > 1)$ とおく。

$\triangle ABD$ は直角三角形であるから、三平方の定理より $BD = \sqrt{x^2 + 1}$

内接円の半径は $\frac{DA + AB - BD}{2} = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}}{2}$

よって 内接円 I の面積は $\pi \left(\frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}}{2} \right)^2 \dots \textcircled{1}$

また、正方形 CEFG の 1 辺の長さを a とおくと、 $\triangle DFE \sim \triangle DBC$ であるから

$$a : x = (1 - a) : 1 \text{ より } a = \frac{x}{x + 1}$$

よって 正方形 CEFG の面積は $\left(\frac{x}{x + 1} \right)^2 \dots \textcircled{2}$

① , ②より

$$\pi \left(\frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}}{2} \right)^2 = \left(\frac{x}{x + 1} \right)^2 \quad \therefore \sqrt{\pi} (x + 1) (x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}) = 2x$$

移項して、両辺を 2 乗すると $\{ \sqrt{\pi} (x + 1)^2 (x^2 + 1) - 2x \}^2 = \pi (x + 1)^2 (x^2 + 1)$

展開して移項すると $-2(2\sqrt{\pi} - \pi)x^3 + 4(\pi - 2\sqrt{\pi} + 1)x^2 - 2(2\sqrt{\pi} - \pi)x = 0$

$x > 1$ に注意して、両辺を $-2x$ で割ると $(2\sqrt{\pi} - \pi)x^2 - 2(\pi - 2\sqrt{\pi} + 1)x + (2\sqrt{\pi} - \pi) = 0$

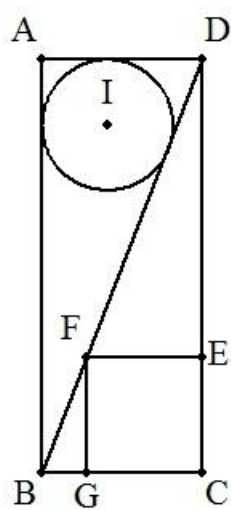
$$x = \frac{\pi - 2\sqrt{\pi} + 1 \pm \sqrt{2\pi - 4\sqrt{\pi} + 1}}{2\sqrt{\pi} - \pi}$$

$x > 1$ より

$$x = \frac{\pi - 2\sqrt{\pi} + 1 + \sqrt{2\pi - 4\sqrt{\pi} + 1}}{2\sqrt{\pi} - \pi} (= 2.569761295)$$

よって $BC = \frac{\pi - 2\sqrt{\pi} + 1 + \sqrt{2\pi - 4\sqrt{\pi} + 1}}{2\sqrt{\pi} - \pi} \dots$ (答)

(補足) $x = \frac{\pi - 2\sqrt{\pi} + 1 - \sqrt{2\pi - 4\sqrt{\pi} + 1}}{2\sqrt{\pi} - \pi} (= 0.3891412022)$ の方は下図の場合となる。



(2012/3/21 時岡)