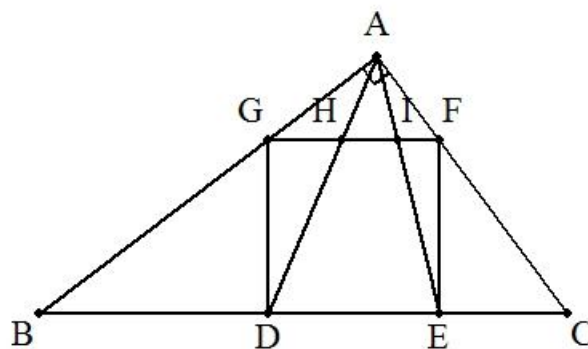


$\angle A = 90^\circ$ である $\triangle ABC$ の辺 BC 上に内接正方形 $DEFG$ をつくり、 AD 、 AE と GF との交点をそれぞれ H 、 I とする。
このとき、 $GI^2 + FH^2 + HI^2 = GF^2$ を証明せよ。



(証) 正方形の1辺を a 、 $GH = x$ 、 $HI = y$ 、 $IF = z$ とおく。

$$GF \parallel BC \text{ より } \frac{x}{BD} = \frac{y}{a} = \frac{z}{EC} \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle GBD \sim \triangle CFE \text{ より } \frac{BD}{a} = \frac{a}{EC} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } BD = \frac{ax}{y}, EC = \frac{az}{y}$$

これらを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} \quad \therefore y^2 = zx$$

$$GI^2 + FH^2 + HI^2 = (x + y)^2 + (y + z)^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

ここで、 $2y^2 = 2zx$ より

$$GI^2 + FH^2 + HI^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2 = GF^2$$

(終証)

【補足】 $CA = b$ 、 $AB = c$ のとき $BC = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ とおくと、

$$\textcircled{1} \quad GH = \frac{bc^3 \sqrt{b^2 + c^2}}{(b^2 + bc + c^2)^2} = \frac{abc^3}{(a^2 + bc)^2}, \quad HI = \frac{b^2 c^2 \sqrt{b^2 + c^2}}{(b^2 + bc + c^2)^2} = \frac{ab^2 c^2}{(a^2 + bc)^2}, \quad IF = \frac{b^3 c \sqrt{b^2 + c^2}}{(b^2 + bc + c^2)^2} = \frac{ab^3 c}{(a^2 + bc)^2}$$

$$\textcircled{2} \quad GH : HI : IF = c^2 : bc : b^2$$

$$(\text{例}) \quad AB = 4, \quad AC = 3 \text{ のとき, } GH = \frac{960}{1369}, \quad HI = \frac{720}{1369}, \quad IF = \frac{540}{1369}$$

(2012/3/26 時岡)