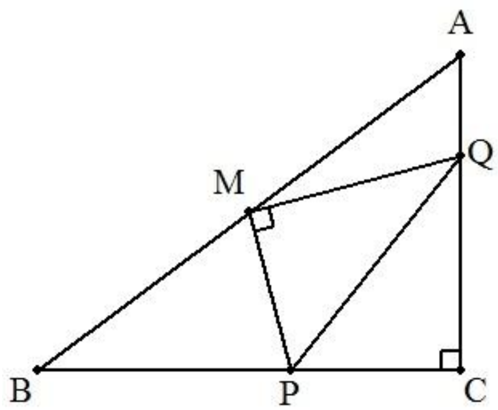
三角形ABCは∠C＝90°の直角三角形で，ABの中点をMとする。
BC，CA上にそれぞれ点P，Qを∠PMQ＝90°となるようにとる。
このとき，次を証明せよ。

(1)　△ABC∽△PQM

(2)　$PQ^2=BP^2+AQ^2$

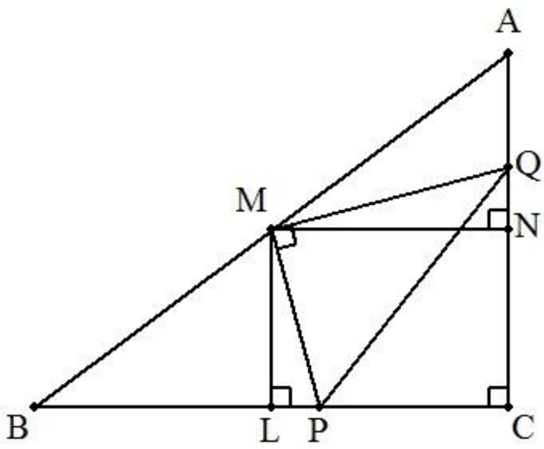


（証）

(1) 点Mは△ABCの外心であるから，MB＝MCより∠MBP＝∠MCP･･･①
四角形MPCQは円に内接するので，∠MCP＝∠MQP･･･②
△ABCと△PQMにおいて
①，②より∠ABC＝∠PQM
∠ABC＝90°＝∠PMQ
2組の角がそれぞれ等しいから，△ABC∽△PQM（終証）

(2) 点MからBC，CAに下ろした垂線の足をそれぞれL，Nとすると，L，NはBC，CAの中点となる。
△MLPと△MNQにおいて
∠PML＝90°－∠PMN＝∠QMN
∠MLP＝90°＝∠MNQ
2組の角がそれぞれ等しいから，△MLP∽△MNQ
いま，LP＝pとおくと
ML : MN＝LP : NQより$\frac{1}{2}b:\frac{1}{2}a=p:\mathrm{NQ}$

∴NQ＝$\frac{a}{b}p$



以上より

$$PQ^2=PC^2+QC^2=\left(\frac{a}{2}-p\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{b}p\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{b^2}p^2$$

$$BP^2+AQ^2=\left(\frac{a}{2}+p\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{b}p\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{b^2}p^2$$

よって　$PQ^2=BP^2+AQ^2$　（終証）

（2012/8/30　時岡）