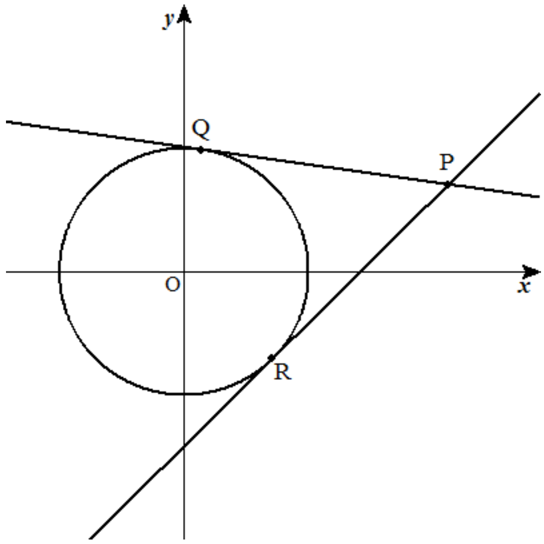
点 P(a,b)と円 $x^2+y^2=r^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 点 P から円に引いた接線の方程式を求めよ。ただし，$a^2+b^2>r^2$ とする。
(2) 点 P から円に 2 本の接線を引き，接点をそれぞれ Q，R とする。このとき，△PQR の面積を求めよ。
(3) 直線 QR の方程式を求めよ。

（解）(1)　接点を Q(x_1,y_1)とすると　$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2\cdots①$



点 Q における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=r^2$

これが点 P(a,b)を通ることから

$ax_1+by_1=r^2\quad by_1=r^2-ax_1\cdots②$

①の両辺に b^2 を掛けると　$b^2x_1{}^2+(by_1)^2=b^2r^2$

これに②を代入すると　$b^2x_1{}^2+(r^2-ax_1)^2=b^2r^2$

整理すると　$(a^2+b^2)x_1{}^2-2ar^2x_1+r^2(r^2-b^2)=0$

$\dfrac{D}{4}=(-ar^2)^2-(a^2+b^2)r^2(r^2-b^2)=b^2r^2(a^2+b^2-r^2)$ より

$x_1=\dfrac{ar^2\pm br\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}$

これを②に代入して　$y_1=\dfrac{br^2\mp ar\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}$　（複号同順）

よって接線は　$\dfrac{ar^2\pm br\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}x+\dfrac{br^2\mp ar\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}y=r^2$

$\therefore\left(ar\pm b\sqrt{a^2+b^2-r^2}\right)x+\left(br\mp a\sqrt{a^2+b^2-r^2}\right)y=(a^2+b^2)r$　（複号同順）・・・（答）

(2) ∠QPR＝θ とおく。

OP＝$\sqrt{a^2+b^2}$，PQ＝PR＝$\sqrt{a^2+b^2-r^2}$ である。

△OPQ において，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから

$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cdot\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2r\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}$

よって

$\Delta PQR=\dfrac{1}{2}PQ\cdot PR\sin\theta=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2-r^2}\right)^2\cdot\dfrac{2r\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}=\dfrac{r(a^2+b^2-r^2)\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}\cdots$(答)

（2013/11/19　時岡）

(3) 2 つの接点を Q(x_1,y_1)，R(x_2,y_2)とおくと，接線の方程式はそれぞれ

$x_1x + y_1y = r^2$， $x_2x + y_2y = r^2$

これらはともに点 $\mathrm{P}(a, b)$ を通ることから

$ax_1 + by_1 = r^2$， $ax_2 + by_2 = r^2$

これは２点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) は直線 $ax + by = r^2$ 上にあることを示している。

（答） $ax + by = r^2$

（2013/12/11　時岡）