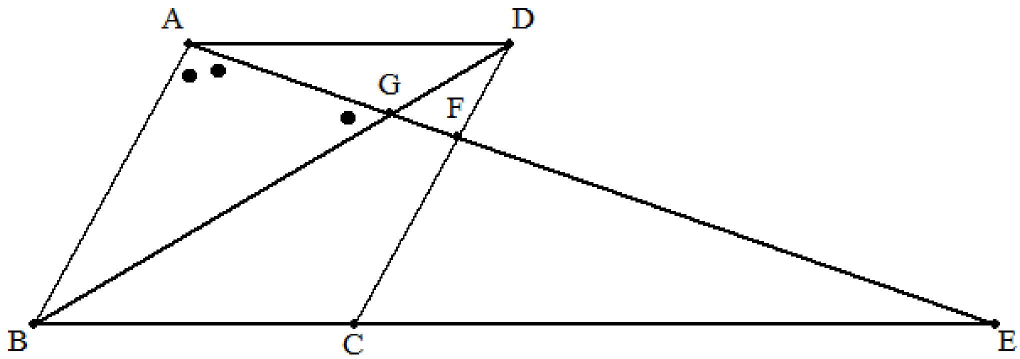
ひし形 ABCD の辺 BC の延長上に点 E をとり，AE と CD，BD との交点をそれぞれ F，G とするとき，∠BAG＝2∠BGA， EF=a， FG＝b であった。このとき，ひし形の面積を求めよ。



（解）AB=x，AG＝y，BG＝z とおく。

△GAB∽△GFD より GA：GF＝AB：FD

y ：b ＝x ：FD より FD＝$\dfrac{bx}{y}$

CF＝CD－FD＝$x-\dfrac{bx}{y}=\dfrac{x(y-b)}{y}$

△EFC∽△EAB より EF：EA＝GC：AB

a ：$(a+b+y)=\dfrac{x(y-b)}{y}$ ：x より

$$(a+b+y)\cdot\frac{x(y-b)}{y}=ax$$

$$y^2=b(a+b)$$

$y>0$ より

$$y=\sqrt{b(a+b)}$$

CG をつなぐと，△GAB≡△GCB より∠GAB＝∠GCB

また，∠AGB＝∠CGB より∠AGC＝∠BCG

∠EGC＝∠ECG より△EGC は二等辺三角形となるから，EG＝EC

よって　ECF＝$a+b$

△FDA∽△FCE より FA：FE＝DA：CE

$(y+b)$：a ＝x ：$(a+b)$ より

$$x=\frac{(a+b)(y+b)}{a}=\frac{(a+b)\left\{b+\sqrt{b(a+b)}\right\}}{a}$$

∠BAG の二等分線と BG との交点を H とする。

AB：AG＝BH：GH であるから BH＝$\dfrac{xz}{x+y}$

△BHA∽△BAG より BH：BA＝BA：BG

$\dfrac{xz}{x+y}$ ：x ＝x ：z より

$$z^2=x(x+y)=\frac{(a+b)\left\{b+\sqrt{b(a+b)}\right\}}{a}\left[\frac{(a+b)\left\{b+\sqrt{b(a+b)}\right\}}{a}+\sqrt{b(a+b)}\right]$$

$$=\frac{b(a+b)\left\{2(a+b)^2+(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}\right\}}{a^2}$$

$z>0$ より

$$z=\frac{\sqrt{b(a+b)\{2(a+b)^2+(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}\}}}{a}$$

△GDA∽△GBE より DA : BE＝GD : GB

x : $(x+a+b)$＝GD : z より GD＝ $\dfrac{xz}{x+a+b}$

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BG}+\mathrm{GD}=z+\frac{xz}{x+a+b}=\frac{z(2x+a+b)}{x+a+b}=\frac{\{b+\sqrt{b(a+b)}\}\sqrt{2(a+b)^2+(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}}}{a}$$

ひし形の対角線は垂直に交わり，互いに他を二等分するから，三平方の定理より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AC}=\sqrt{AD^2-\left(\frac{1}{2}BD\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{(a+b)\{b+\sqrt{b(a+b)}\}}{a}\right]^2-\left[\frac{\{b+\sqrt{b(a+b)}\}\sqrt{2(a+b)^2+(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}}}{2a}\right]^2}$$

$$=\frac{\{b+\sqrt{b(a+b)}\}\sqrt{2(a+b)^2-(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}}}{2a}$$

よって，ひし形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot AC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\{b+\sqrt{b(a+b)}\}\sqrt{(a+b)\{2(a+b)^2+(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}\}}}{a}\cdot\frac{\{b+\sqrt{b(a+b)}\}\sqrt{2(a+b)^2-(3a+2b)\sqrt{b(a+b)}}}{a}$$

$$=\frac{\{b+\sqrt{b(a+b)}\}^2\sqrt{(a+b)(4a+3b)}}{2a}\cdots(答)$$

（具体例）

a	b	x	y	z	BD	AC	S
3	1	4	2	$2\sqrt{6}$	$3\sqrt{6}$	$\sqrt{10}$	$3\sqrt{15}$
8	1	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{15}}{2}$	$2\sqrt{15}$	$\sqrt{21}$	$3\sqrt{35}$
5	4	18	6	$12\sqrt{3}$	$20\sqrt{3}$	$4\sqrt{6}$	$120\sqrt{2}$
21	4	$\frac{50}{3}$	10	$\frac{20\sqrt{10}}{3}$	$\frac{28\sqrt{10}}{3}$	$4\sqrt{15}$	$\frac{280\sqrt{6}}{3}$
16	9	$\frac{75}{2}$	15	$\frac{15\sqrt{35}}{2}$	$12\sqrt{35}$	$3\sqrt{65}$	$90\sqrt{91}$

（2013/11/28　時岡）