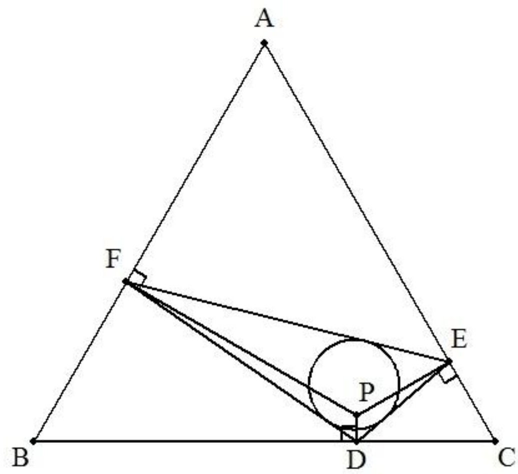
1辺の長さが10の正三角形ABCの内部に点Pをとり，
Pから辺BC，CA，ABに下ろした垂線の足をそれぞれ
D，E，Fとする。
AF＝6，BD＝7のとき，次の長さを求めよ。
(1) CE
(2) PD
(3) 三角形DEFの内接円の半径



（解）

(1)　仮定より，BF＝4，CD＝3で，CE＝b_1とおくと，EA＝$10-b_1$である。

△AFP，△BDP，△CEPに三平方の定理を適用すると

AP²＋BP²＋CP²

＝(AF²＋PF²)＋(BD²＋PD²)＋(CE²＋PE²)

＝(6²＋PF²)＋(7²＋PD²)＋($b_1{}^2$＋PE²)

＝$b_1{}^2$＋85＋(PD²＋PE²　＋PF²)･･･①

同様に，△AEP，△BFP，△CDPに三平方の定理を適用すると

AP²＋BP²＋CP²

＝(AE²＋PE²)＋(BF²＋PF²)＋(CD²＋PD²)

＝{$(10-b_1)^2$＋PE²}＋(4²＋PF²)＋(3²＋PD²)

＝$b_1^2-20b_1+125$＋(PD²＋PE²　＋PF²)･･･②

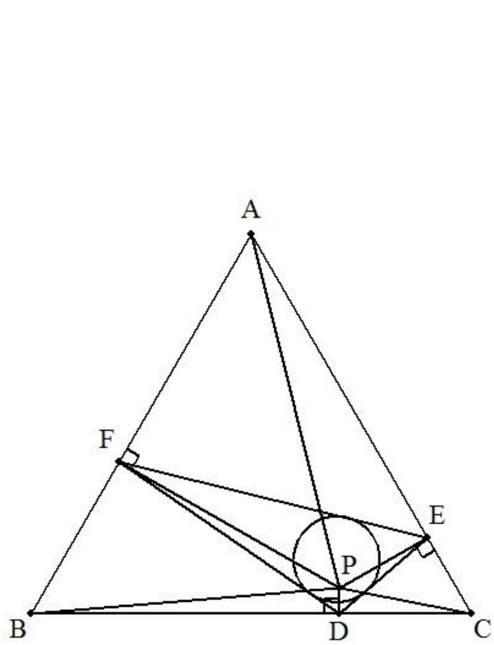
①，②より

$$b_1^2+85=b_1^2-20b_1+125$$

$$20b_1=40$$

$$b_1=2$$

よって，CE＝2･･･（答）



(2) AP＝x，BP＝y，CP＝zとおく。

△PAEと△PCEに三平方の定理を適用すると

PE²＝$x^2-8^2=z^2-2^2$　　$\therefore x^2=z^2+60$･･･①

△PBDと△PCDに三平方の定理を適用すると

PD²＝$y^2-7^2=z^2-3^2$　　$\therefore y^2=z^2+40$･･･②

∠BPC＝α，∠CPA＝β，∠APB＝γとおくと

$$\cos\alpha=\frac{y^2+z^2-10^2}{2yz},\cos\beta=\frac{z^2+x^2-10^2}{2zx},\cos\gamma=\frac{x^2+y^2-10^2}{2xy}\cdots③$$

$\alpha+\beta+\gamma=180°$ であるから，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

これに③を代入

$$\left(\frac{y^2+z^2-10^2}{2yz}\right)^2+\left(\frac{z^2+x^2-10^2}{2zx}\right)^2+\left(\frac{x^2+y^2-10^2}{2xy}\right)^2=1+2\left(\frac{y^2+z^2-10^2}{2yz}\right)\left(\frac{z^2+x^2-10^2}{2zx}\right)\left(\frac{x^2+y^2-10^2}{2xy}\right)$$

両辺に $4x^2y^2z^2$ をかけると

$$x^2\left(y^2+z^2-10^2\right)^2+y^2\left(z^2+x^2-10^2\right)^2+z^2\left(x^2+y^2-10^2\right)^2=4x^2y^2z^2+\left(y^2+z^2-10^2\right)\left(z^2+x^2-10^2\right)\left(x^2+y^2-10^2\right)$$

これに，①，②を代入すると

$$\left(z^2+60\right)\left(2z^2-60\right)^2+\left(z^2+40\right)\left(2z^2-40\right)^2+z^2\left(2z^2\right)^2=4\left(z^2+60\right)\left(z^2+40\right)z^2+\left(2z^2-60\right)\left(2z^2-40\right)\left(2z^2\right)$$

両辺を 4 で割り，展開して整理すると

$70000-7500z^2=0$，$z^2=\dfrac{28}{3}$

$z>0$ より　$z=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

よって　PD＝$\sqrt{z^2-3^2}=\sqrt{\dfrac{28}{3}-9}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$・・・（答）

(2)（別解）AP＝x，BP＝y，CP＝z とおく。

△PAE と△PCE に三平方の定理を適用すると

PE²＝$x^2-8^2=z^2-2^2$　$\therefore x^2=z^2+60$・・・①

△PBD と△PCD に三平方の定理を適用すると

PD²＝$y^2-7^2=z^2-3^2$　$\therefore y^2=z^2+40$・・・②

△ABC と点 P について，六斜術を適用

$$a^2x^2\left(b^2+c^2+y^2+z^2-a^2-x^2\right)+b^2y^2\left(c^2+a^2+z^2+x^2-b^2-y^2\right)+c^2z^2\left(a^2+b^2+x^2+y^2-c^2-z^2\right)$$
$$=a^2b^2c^2+a^2y^2z^2+b^2z^2x^2+c^2x^2y^2$$

これに，$a=b=c=10$，および①，②を代入すると

$$\left(z^2+60\right)\left\{10^2+\left(z^2+60\right)+z^2-\left(z^2+60\right)\right\}+\left(z^2+40\right)\left\{10^2+z^2+\left(z^2+60\right)-\left(z^2+40\right)\right\}$$
$$+z^2\left\{10^2+\left(z^2+60\right)+\left(z^2+40\right)-z^2\right\}=10^2\cdot10^2+\left(z^2+40\right)z^2+z^2\left(z^2+60\right)+\left(z^2+60\right)\left(z^2+40\right)$$

$$\left(z^2+60\right)\left(z^2+80\right)+\left(z^2+40\right)\left(z^2+120\right)+z^2\left(z^2+200\right)=10000+z^2\left(2z^2+100\right)+\left(z^2+60\right)\left(z^2+40\right)$$

$300z^2=2800$，$z^2=\dfrac{28}{3}$

$z>0$ より　$z=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

よって　PD＝$\sqrt{z^2-3^2}=\sqrt{\dfrac{28}{3}-9}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$・・・（答）

(3) まず，(1)，(2)より， $x=\dfrac{4\sqrt{39}}{3}, y=\dfrac{2\sqrt{111}}{3}, z=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}, PD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, PE=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, PF=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ である。

四角形 AFPE，BDPF，CEPD はそれぞれ円に内接するので，トレミーの定理を適用すると

AP・EF＝AF・PE＋AE・PF より　$\dfrac{4\sqrt{39}}{3}EF=6\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+8\cdot\dfrac{10\sqrt{3}}{3}, \therefore EF=2\sqrt{13}$

BP・FD＝BD・PF＋BF・PD より　$\dfrac{2\sqrt{111}}{3}FD=7\cdot\dfrac{10\sqrt{3}}{3}+4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \therefore FD=\sqrt{37}$

CP・DE＝CE・PD＋CD・PE より　$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}DE=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+3\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, \therefore DE=\sqrt{7}$

$s=\dfrac{DE+EF+FD}{2}=\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{13}+\sqrt{37}}{2}$ とおくと，

△DEF＝ $\sqrt{s(s-DE)(s-EF)(s-FD)}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ であるから，

よって，△DEF の内接円の半径 r は

$$r=\frac{\Delta DEF}{s}=\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{13}+\sqrt{37}}=\frac{41\sqrt{21}-8\sqrt{39}+11\sqrt{111}-2\sqrt{10101}}{54}(=0.9779694118)\ldots$$ （答）

【補足】

(1) △ABC 内に点 P をとり，P から辺 BC，CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。

BD＝a_1，CD＝a_2，CE＝b_1，AE＝b_2，AF＝c_1，BF＝c_2 とおくと，

（ア） $a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2=a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2$

（イ） PD＋PE＋PF＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AB（正三角形の高さ）

が成り立つ。

(2) 六斜術

△ABC 内に点 P をとり，AP＝x，BP＝y，CP＝z とおくと，次の式が成り立つ。

$$a^2x^2(b^2+c^2+y^2+z^2-a^2-x^2)+b^2y^2(c^2+a^2+z^2+x^2-b^2-y^2)+c^2z^2(a^2+b^2+x^2+y^2-c^2-z^2)$$
$$=a^2b^2c^2+a^2y^2z^2+b^2z^2x^2+c^2x^2y^2$$

（2012/3/10　時岡）

（2012/3/20　時岡）