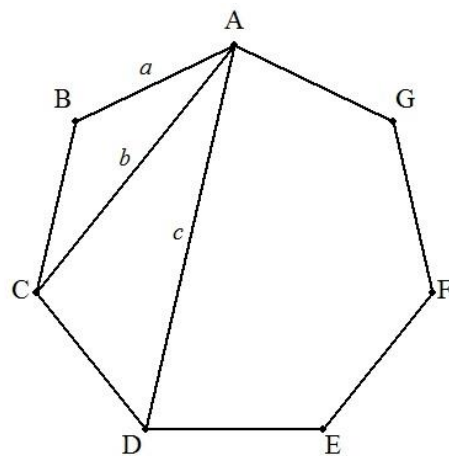


A108(5) (6)

正七角形 ABCDEFG について、 $AB=a$ ， $AC=b$ ， $AD=c$ とおくとき、次の値を求めよ。

$$(5) \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

$$(6) \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$



(解)

(5) 次の4つの四角形にそれぞれトレミーの定理を適用する。

$$(ア) \text{ 四角形 } ABCD \text{ から } ac + a^2 = b^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(イ) \text{ 四角形 } ABDE \text{ から } bc + a^2 = c^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(ウ) \text{ 四角形 } ABDF \text{ から } ab + b^2 = c^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$(エ) \text{ 四角形 } ABCF \text{ から } ab + ac = bc \quad \therefore bc - ab = ac \quad \cdots \textcircled{4}$$

このとき、

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{ac + a^2}{a^2} + \frac{ab + b^2}{b^2} + \frac{c^2 - bc}{c^2} \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より})$$

$$= \frac{c}{a} + 1 + \frac{a}{b} + 1 + 1 - \frac{b}{c} = 3 + \frac{bc + a^2}{ab} - \frac{b}{c} = 3 + \frac{c^2}{ab} - \frac{b}{c} \quad (\because \textcircled{2} \text{より})$$

$$= 3 + \frac{ab + b^2}{ab} - \frac{b}{c} \quad (\because \textcircled{3} \text{より})$$

$$= 3 + 1 + \frac{b}{a} - \frac{b}{c} = 4 + \frac{bc - ab}{ac} = 4 + \frac{ac}{ac} \quad (\textcircled{4} \text{より})$$

$$= 4 + 1 = 5 \quad \cdots (\text{答})$$

(補足1) ①～④のうちのどれか3式から、他の1式を導くことができる。

(6)

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2 - bc}{b^2} + \frac{ac + a^2}{c^2} + \frac{ab + b^2}{a^2} \quad (\because \textcircled{2}, \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より})$$

$$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} - \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}$$

ここで

$$-\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} = -\frac{c^2 - ab}{bc} + \frac{b}{a} = -\frac{b^2}{bc} + \frac{b}{a} \quad (\because \textcircled{3} \text{より})$$

$$= -\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = \frac{-ab + bc}{ac} = \frac{ac}{ac} \quad (\because \textcircled{4} \text{より})$$

$$= 1$$

$$\text{よって、(5)の結果を利用して、} \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = 5 + 1 = 6 \quad \cdots (\text{答})$$