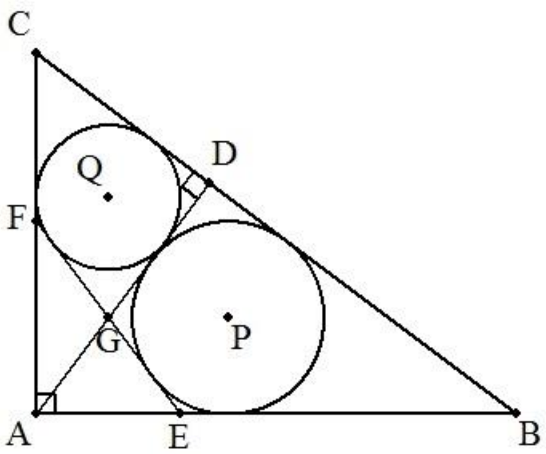
∠A＝90°の直角三角形 ABC の点 A から BC に下ろした垂線の足を D とする。△ABD，△ACD の内接円をそれぞれ P, Q とし，円 P，Q の共通外接線と AB，AC との交点をそれぞれ E，F とする。また，AD と EF の交点を G とする。
このとき，△AFE∽△ABC を証明せよ。



（証）PG と AC の交点を H とする。

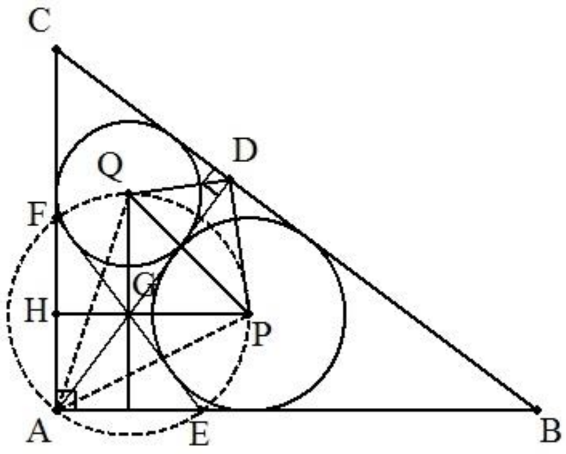
$\angle \mathrm{PDQ}=\angle \mathrm{PDG}+\angle \mathrm{QDG}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BDA}+\frac{1}{2}\angle \mathrm{CDA}=90^\circ$

$\angle \mathrm{PGQ}=\angle \mathrm{PGD}+\angle \mathrm{QGD}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{EGD}+\frac{1}{2}\angle \mathrm{FGD}=90^\circ$ ･･･①　より

$\angle \mathrm{PDQ}+\angle \mathrm{PGQ}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ となるから，四角形 PDQG は円に内接する。
円周角は等しいから

$\angle \mathrm{GPQ}=\angle \mathrm{GDQ}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{GDC}=45^\circ$

$\angle \mathrm{GAP}=\angle \mathrm{GDP}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{GDB}=45^\circ$



これらと①より，△GPQ は直角二等辺三角形となる。

$\angle \mathrm{PAQ}=\angle \mathrm{PAG}+\angle \mathrm{QAG}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{EAG}+\frac{1}{2}\angle \mathrm{FAG}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{EAF}$

$=45^\circ=\frac{1}{2}\angle \mathrm{PGQ}$

円周角と中心角の関係が成り立つから
点 G は，3 点 A，P，Q を通る円の中心となる。
GQ＝GA より∠GQA＝∠GAQ＝∠FAQ
錯角が等しいから，GQ∥AF より GH⊥AF
△HFG と△HAG において，
GH＝GH（共通）
∠GHF＝∠GHA＝90°
∠FGH＝∠EGP＝∠DGP＝∠AGH
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△HFG≡△HAG･･･②
また，△HFG∽△AFE･･･③
　　　△HAG∽△DAC∽△ABC･･･④
②，③，④より
△AFE∽△ABC（終証）
なお，5 点 A，E，P，Q，F は同一円周上にある。（2013/3/28　時岡）