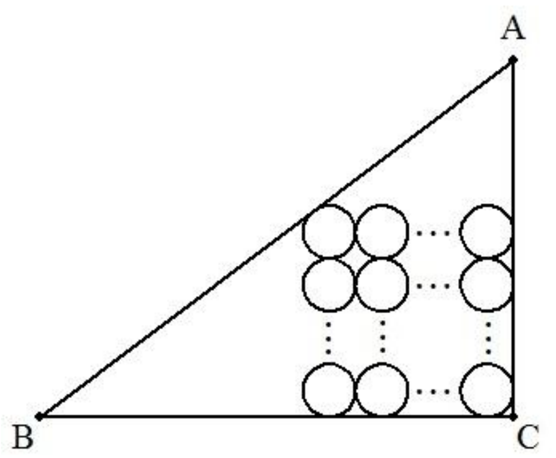
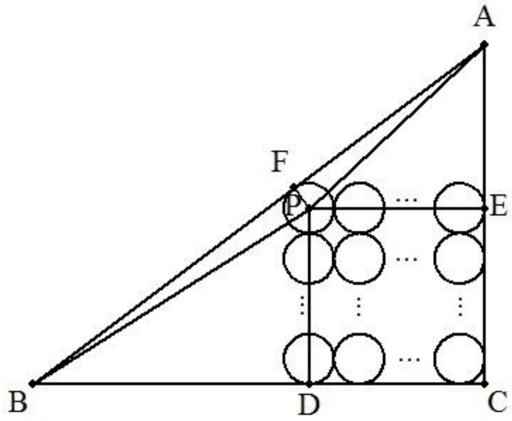
C＝90°の直角三角形 ABC に，図のように $n \times n$ 個の半径 r の等円が内接している。ただし，1 行目の n 個の円の中心を通る直線は BC に平行で，1 列目の n 個の円の中心を通る直線は AC に平行である。BC＝a，CA＝b のとき，r を a,b,n を用いて表せ。



（解）$n \times n$ 個の円の中で，1 行 1 列の円の中心を P, P から 3 辺 BC, CA，AB に下ろした垂線の足を順に D，E，F とする。



△PAB に余弦定理を適用すると

$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP\cos(\angle ABP)$・・・①

ここで,

$AP^2 = AE^2 + EP^2$

$$= \{b-(2n-1)r\}^2 + \{(2n-1)r\}^2 = b^2 - 2b(2n-1)r + 2(2n-1)^2 r^2$$

$AB^2 = BC^2 + CA^2 = a^2 + b^2$

$BP^2 = BD^2 + DP^2$

$$= \{a-(2n-1)r\}^2 + \{(2n-1)r\}^2 = a^2 - 2a(2n-1)r + 2(2n-1)^2 r^2$$

$BP\cos(\angle ABP) = BF$

$$= \sqrt{BP^2 - FP^2} = \sqrt{a^2 - 2a(2n-1)r + 2(2n-1)^2 r^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - 2a(2n-1)r + (8n^2-8n+1)r^2}$$

であるから，①は

$$\{b^2 - 2b(2n-1)r + 2(2n-1)^2 r^2\}$$
$$= (a^2+b^2) + \{a^2 - 2a(2n-1)r + 2(2n-1)^2 r^2\} - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2 - 2a(2n-1)r + (8n^2-8n+1)r^2}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2 - 2a(2n-1)r + (8n^2-8n+1)r^2} = a^2 - (a-b)(2n-1)r$$

両辺を平方し，左辺に移項すると

$$(a^2+b^2)\{a^2 - 2a(2n-1)r + (8n^2-8n+1)r^2\} - \{a^2 - (a-b)(2n-1)r\}^2 = 0$$

（r^2 の係数）　$(a^2+b^2)(8n^2-8n+1) - (a-b)^2(2n-1)^2 = 4n(n-1)(a^2+b^2) + 2(2n-1)^2 ab$

（r の係数）　$-2a(a^2+b^2)(2n-1) + 2a^2(a-b)(2n-1) = -2(2n-1)ab(a+b)$

（定数項）　$a^2(a^2+b^2) - a^4 = a^2b^2$

よって

$$2\{2n(n-1)(a^2+b^2) + (2n-1)^2 ab\}r^2 - 2(2n-1)ab(a+b)r + a^2b^2 = 0 \cdots ②$$

ここで

$$\frac{D}{4}=\{-(2n-1)ab(a+b)\}^2-2\{2n(n-1)(a^2+b^2)+(2n-1)^2ab\}a^2b^2$$
$$=a^2b^2\left[(2n-1)^2(a+b)^2-2\{2n(n-1)(a^2+b^2)+(2n-1)^2ab\}\right]$$
$$=a^2b^2(a^2+b^2)$$

②を r について解くと

$$r=\frac{(2n-1)ab(a+b)\pm ab\sqrt{a^2+b^2}}{2\{2n(n-1)(a^2+b^2)+(2n-1)^2ab\}}=ab\cdot\frac{(2n-1)(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2\{2n(n-1)(a^2+b^2)+(2n-1)^2ab\}}$$
$$=ab\cdot\frac{(2n-1)^2(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2\{2n(n-1)(a^2+b^2)+(2n-1)^2ab\}\{(2n-1)(a+b)\mp\sqrt{a^2+b^2}\}}=\frac{ab}{(2n-1)(a+b)\mp\sqrt{a^2+b^2}}\cdots③$$

（複号同順）

$n=1$ のとき，③より $r=\dfrac{ab}{a+b\mp\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{ab\left(a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}\right)}{(a+b)^2-(a^2+b^2)}=\dfrac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ （複号同順）

実際，$n=1$ のとき，$r=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ であるから，複号は下の方を選ぶ。

よって，題意に適するのは，

$$r=\frac{ab}{(2n-1)(a+b)+\sqrt{a^2+b^2}}\cdots（答）$$

【例】BC＝4，CA＝3，$n=4$ のとき，$r=\dfrac{2}{9}$

（2013/2/6　時岡）