

△ABC の 3 中線 AD, BE, CF を 3 辺とする三角形の面積は, △ABC の面積の $\frac{3}{4}$ であることを証明せよ。

(証)

AB を 3 : 1 に外分する点を G とすると, $AF = FB = BG$

△CAB で中点連結定理より $DE = GB$, $DE \parallel GB$

よって, 四角形 BGDE は平行四辺形となるから, 中線 $BE = GD \cdots ①$

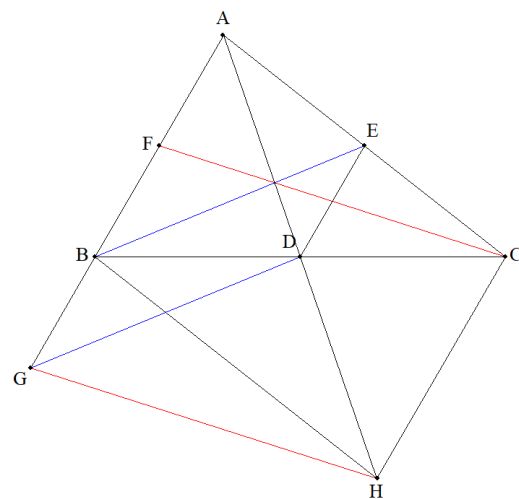
次に, AD を 2 : 1 に外分する点を H とすると, 中線 $AD = DH \cdots ②$

また, 四角形 ABHC は対角線が互いに他を 2 等分しているので平行四辺形であるから, $CH = AB = FG$ 。

従って, 四角形 FGHC も平行四辺形となるから, 中線 $CF = HG \cdots ③$

①, ②, ③より 3 中線 AD, BE, CF を 3 辺とする三角形は△DGH である。

$$\triangle DGH = \triangle DGA = \frac{3}{2} \triangle DBA = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{3}{4} \triangle ABC \quad \blacksquare$$



(2018/11/3 時岡)