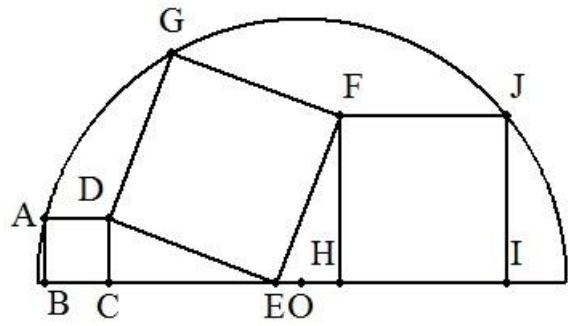


半円 O 内に図のように 3 個の正方形が配置されている。
 正方形 $ABCD$ は、辺 BC が直径上にあり、点 A は円周上にある。正方形 $DEFG$ は、点 E が直径上にあり、点 G は円周上にある。正方形 $FHIJ$ は、辺 HI が直径上にあり、点 J は円周上にある。3 個の正方形の辺の長さを $CD=a$, $DE=b$, $FH=c$ ($a < c$) とおくと、それらを半円の半径 r を用いて表せ。



(解) 点 G の BI に関する対象点を K , 点 D から GK に下ろした垂線の足を L , AO の延長と円 O との交点を M とする。

$\triangle DLG \equiv \triangle DCE$ より $DL=DC=a$ であるから $AL=2a$

$\triangle DLG \equiv \triangle EHF$ より $GL=FH=c$ であるから $GL=c$

$\therefore LK=2a+c$

$\triangle ALG$ に三平方の定理を適用すると

$$AG^2 = GL^2 + AL^2$$

$$= c^2 + (2a)^2$$

$$= (a+c-a)^2 + (2a)^2$$

$$= (a+c)^2 - 2a(a+c) + 5a^2$$

$\triangle ALK$ に三平方の定理を適用すると

$$AK^2 = LK^2 + AL^2$$

$$= (2a+c)^2 + (2a)^2$$

$$= (a+c+a)^2 + (2a)^2$$

$$= (a+c)^2 + 2a(a+c) + 5a^2$$

$$AG^2 \cdot AK^2$$

$$= \{(a+c)^2 + 5a^2\}^2 - \{2a(a+c)\}^2$$

$$= (a+c)^4 + 6a^2(a+c)^2 + 25a^4 \dots \textcircled{1}$$

また, $\triangle KAL \sim \triangle MAG$ より

$$AK : AM = AL : AG$$

$$AG \cdot AK = AM \cdot AL = 2r \cdot 2a = 4ar$$

これを①に代入すると

$$16a^2r^2 = (a+c)^4 + 6a^2(a+c)^2 + 25a^4 \dots \textcircled{2}$$

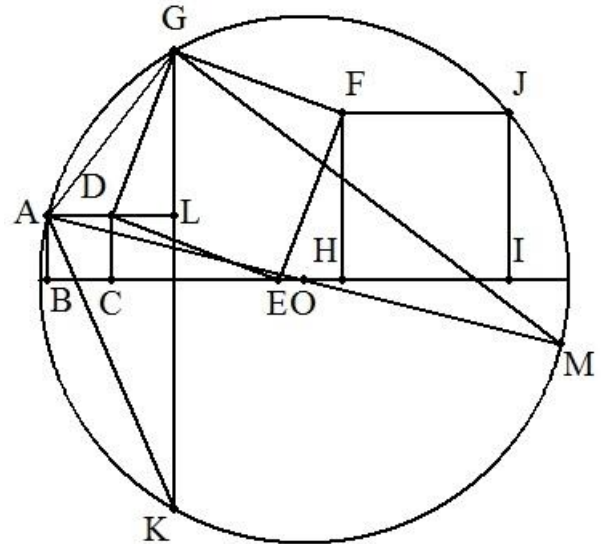
同様に, a と c を入れ換えると

$$16c^2r^2 = (a+c)^4 + 6c^2(a+c)^2 + 25c^4 \dots \textcircled{3}$$

② $\times c^2$ - ③ $\times a^2$ を計算すると

$$(a^2 - c^2)(a+c)^4 - 25a^2c^2(a^2 - c^2) = 0$$

$c > a > 0$ より



$$(a+c)^2 = 5ac \cdots \textcircled{4}$$

△DLGは直角三角形であるから、④より

$$b^2 = a^2 + c^2 = 3ac \cdots \textcircled{5}$$

④を②に代入すると

$$16a^2r^2 = (5ac)^2 + 6a^2(5ac) + 25a^4$$

$$\therefore 16r^2 = 25(a^2 + c^2) + 10(3ac)$$

これに⑤を代入すると

$$16r^2 = 25b^2 + 10 \cdot b^2 = 35b^2$$

$b > 0, r > 0$ より

$$b = \frac{4}{\sqrt{35}}r \cdots \textcircled{6}$$

また、④、⑤より

$$a+c = \sqrt{5ac} = \sqrt{\frac{5}{3}b}, ac = \frac{1}{3}b^2 \text{ より}$$

a, c は

$$t^2 - \sqrt{\frac{5}{3}}bt + \frac{1}{3}b^2 = 0 \text{ の } 2 \text{ つの解である。}$$

$$3t^2 - \sqrt{15}bt + b^2 = 0 \text{ より}$$

$$t = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{3}}{6}b = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{3}}{6} \times \frac{4}{\sqrt{35}}r = \frac{2(\sqrt{5} \pm 1)}{\sqrt{105}}r$$

$a < c$ より

$$a = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{105}}r, c = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{105}}r$$

よって

$$a = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{105}}r, b = \frac{4}{\sqrt{35}}r, c = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{105}}r \cdots \text{ (答)}$$

(2013/3/21 時岡)