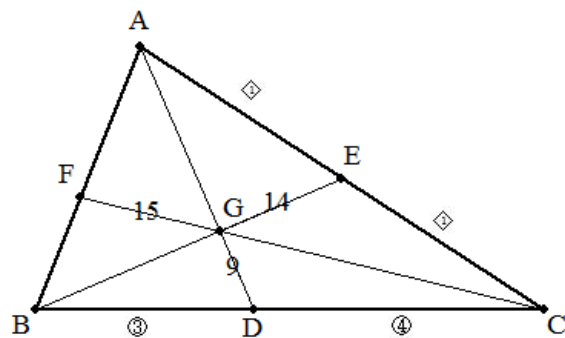


A207

三角形 ABC について、BC を 3 : 4 に内分する点を D、CA の中点を E、AD と BE の交点を G、CG と AB の交点を F とすると、GD=9、GE=14、GF=15 であった。このとき、三角形 ABC の面積を求めよ。



(解) 三角形 ABC にチェバの定理を適用すると

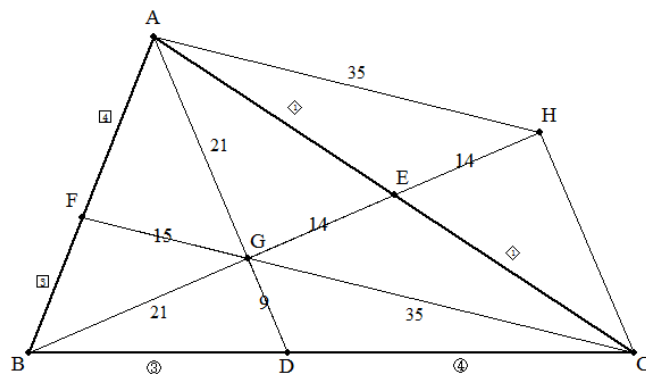
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = 1 \text{ より } AF : FB = 4 : 3$$

また、AG、BG、CG を求めるためにメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AG}{GD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AG}{9} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1} = 1 \text{ より } AG = 21$$

$$\frac{BG}{GE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BG}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 1 \text{ より } BG = 21$$

$$\frac{CG}{GF} \cdot \frac{FA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{CG}{15} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = 1 \text{ より } CG = 35$$



次に、GE の延長上に点 H を EG=EH となるようにとると、EA=EC であるから

四角形 AGCH は平行四辺形となるので、AH=GC=35

また、GH=14+14=28 であるから、

三角形 AGE において AG : GH : HA=21 : 28 : 35=3 : 4 : 5

よって AG²+GH²=HA² が成り立つので、三角形 AGH は直角三角形となる。

$$AG \perp GE \text{ であるから } \triangle AGE = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 21 = 147$$

$$\triangle ABE = \frac{21+14}{14} \triangle AGE = \frac{5}{2} \cdot 147$$

よって

$$\triangle ABC = 2\triangle ABE = 2 \times \frac{5}{2} \cdot 147 = 735 \cdots (\text{答})$$

(2014/1/11 時岡)