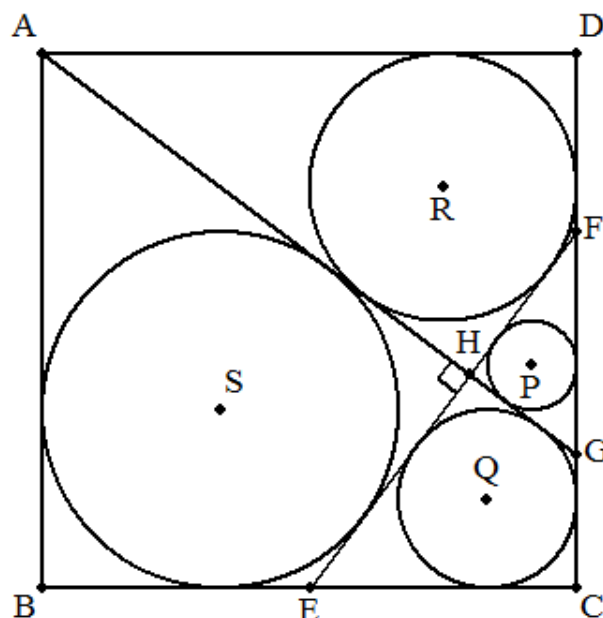


A208

正方形 ABCD において、BC の中点を E、CD を 2 : 1 に内分する点を F、点 A から EF に引いた垂線と CD、EF との交点をそれぞれ G、H とし、△FHG、四角形 CGHE、四角形 AHFD、四角形 ABEH に内接する 4 つの円を順に  $P(r_1)$ 、 $Q(r_2)$ 、 $R(r_3)$ 、 $S(r_4)$  とするとき、

$r_1:r_2:r_3:r_4$  を求めよ。



(解) 正方形の 1 辺の長さを  $a$  とおき、円  $S$  と  $AB$  との接点を  $I$ 、円  $R$  と  $AD$  との接点を  $J$  とする。

$\triangle AIS \sim \triangle ABE$  であるから  $AI:IS=2:1$

$$(a-r_4):r_4=2:1 \text{ より } r_4=\frac{a}{3} \cdots \textcircled{1}$$

同様に、 $\triangle AJR \sim \triangle ADF$  であるから

$$AJ:JR=3:1$$

$$(a-r_3):r_3=3:1 \text{ より } r_3=\frac{a}{4} \cdots \textcircled{2}$$

次に、 $\triangle ECF$  において、 $EC=\frac{a}{2}$ 、 $CF=\frac{2a}{3}$  である

$$\text{から、} EF=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{5a}{6} \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{また、} BE+FD=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=\frac{5a}{6} \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } BE+FD=EF$$

$CB$  の延長上に点  $K$  を  $FD=KB$  となるようにとると、 $\triangle AKE \equiv \triangle AFD$  (3 辺相等) であるから

$$\triangle AKB \equiv \triangle AFH \equiv \triangle AFD \text{ より } \angle DAF = \angle HAF$$

$$\triangle AEB \equiv \triangle AEH \text{ より } \angle BAE = \angle HAE$$

$$\triangle RDA \sim \triangle PHF \text{ である (2 角相等) から } \frac{r_3}{r_1} = \frac{AF}{FH} = 3 \text{ より } r_1 = \frac{1}{3}r_3 = \frac{a}{12} \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{同様に、} \triangle SAB \sim \triangle QEC \text{ であるから } \frac{r_4}{r_2} = \frac{AB}{EC} = 2 \text{ より } r_2 = \frac{1}{2}r_4 = \frac{a}{6} \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より } r_1:r_2:r_3:r_4 = \frac{a}{12}:\frac{a}{6}:\frac{a}{4}:\frac{a}{3} = 1:2:3:4 \cdots (\text{答})$$

