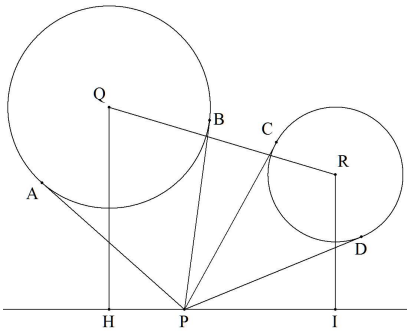
A254

直線 l の同じ側に 2 円 Q，R があり，半径はそれぞれ 3，2，
中心間の距離 QR＝7，円の中心 Q，R から直線 l に下ろした
垂線の足をそれぞれ H，I とすると，QH＝6，RI＝4 であった。
l 上の点 P から 2 円に引いた接線の長さが等しくなるとき，

⑴　接線の長さ AP を求めよ。

⑵　HP : PI の比を求めよ。



解答

⑴　円 Q，R の半径をそれぞれ r_1，r_2，QH＝h_1，RI＝h_2，QR＝d，HP＝x とおく。

HI＝$\sqrt{d^2-(h_1-h_2)^2}$

直角三角形 QHP，RIP，QAP，RDP にそれぞれ三平方の定理を適用すると，

QP＝$\sqrt{x^2+h_1{}^2}$　…①

RP＝$\sqrt{\left(\sqrt{d^2-(h_1-h_2)^2}-x\right)^2+h_2{}^2}$　…②

PA＝$\sqrt{QP^2-r_1{}^2}=\sqrt{x^2+h_1{}^2-r_1{}^2}$　…③

PD＝$\sqrt{RP^2-r_2{}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{d^2-(h_1-h_2)^2}-x\right)^2+h_2{}^2-r_2{}^2}$　…④

仮定より，PA＝PDであるから，PA²＝PD²

③，④より，$x^2+h_1{}^2-r_1{}^2=\left(\sqrt{d^2-(h_1-h_2)^2}-x\right)^2+h_2{}^2-r_2{}^2$

x について解くと，$x=\dfrac{d^2-(h_1-h_2)^2+h_2{}^2-r_2{}^2+r_1{}^2-h_1{}^2}{2\sqrt{d^2-(h_1-h_2)^2}}=\dfrac{d^2-2h_1(h_1-h_2)+r_1{}^2-r_2{}^2}{2\sqrt{d^2-(h_1-h_2)^2}}$

これを③に代入すると，PA が求められる。

さて，$r_1=3$，$r_2=2$，$h_1=6$，$h_2=4$，$d=7$ のとき，$x=\dfrac{7^2-2\cdot6(6-4)+3^2-2^2}{2\sqrt{7^2-(6-4)^2}}=\sqrt{5}$ であるから，

これを③に代入して，PA＝$\sqrt{(\sqrt{5})^2+6^2-3^2}=4\sqrt{2}$　答

⑵　HP : PI＝x ： $(HI-x)=\sqrt{5}:\left(\sqrt{7^2-(6-4)^2}-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}:2\sqrt{5}=1:2$　答

（2014/8/12　時岡）

（2019/12/20　数値を変更）