A258

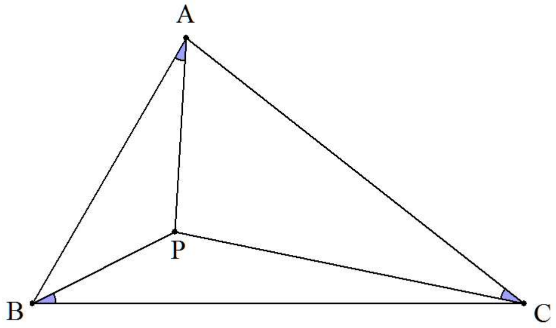
△ABC 内に点 P を，∠PAB＝∠PBC＝∠PCA となるようにとる。

(1)　点 P を作図で求めよ。

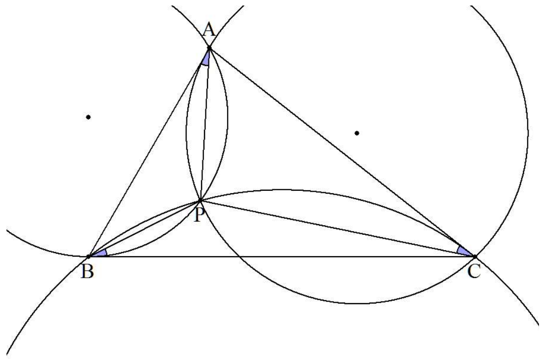
(2)　∠PAB＝ω とおくとき，

$\dfrac{1}{\tan\omega}=\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$ を証明せよ。

(3)　$\omega \leqq 30°$ を証明せよ。



解答



(1)　点 A を通り，BC の点 B で接する円と，点 B を通り，CA の C で接する円の交点を P とすると，接弦定理より

∠PAB＝∠PBC＝∠PCA

∠PCA＝∠PAB より，接弦定理の逆により△PCA の外接円は AB の点 A で接する。

(2)　AP＝x，BP＝y，CP＝z とおくと，

△PBC＝$\dfrac{1}{2}ay\sin\omega=\dfrac{1}{2}ay\cos\omega\tan\omega=\dfrac{a^2+y^2-z^2}{4}\tan\omega$

同様に，△PCA＝$\dfrac{b^2+z^2-x^2}{4}\tan\omega$，△PAB＝$\dfrac{c^2+x^2-y^2}{4}\tan\omega$

これら 3 式を辺々加えると，$S=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}\tan\omega$　$\therefore \dfrac{1}{\tan\omega}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$　…①

また，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cos A\tan A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}\tan A$　$\therefore \dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

同様に，$\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{b^2+a^2-b^2}{4S}$，$\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

これら 3 式を辺々加えると，$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$　…②

よって，①，②より，$\dfrac{1}{\tan\omega}=\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$　終

(3)　ヘロンの公式より，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}=\frac{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{4}$$

①より，

$$\tan^2\omega=\frac{(4S)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\frac{4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$=\frac{4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}{a^4+b^4+c^4+2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}-1=\frac{4}{\dfrac{a^4+b^4+c^4}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}+2}-1$$

ここで，$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2=2\{(a^4+b^4+c^4)-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\}\geqq 0$ であるから

$\dfrac{a^4+b^4+c^4}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2} \geqq 1$ より，$\tan^2\omega \leqq \dfrac{4}{1+2}-1=\dfrac{1}{3}$

$\tan\omega>0$ より，$\tan\omega \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$0° < \omega < 90°$ より，$\omega \leqq 30°$

なお，　等号は，$a^2=b^2=c^2$　$\therefore a=b=c$　すなわち正三角形のとき。 $\boxed{終}$

（別証明）$\dfrac{1}{\tan A}>0$，$\dfrac{1}{\tan B}>0$，$\dfrac{1}{\tan C}>0$であるから，相加平均，相乗平均の関係より

$$\frac{1}{\tan\omega}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\tan A}\cdot\frac{1}{\tan B}\cdot\frac{1}{\tan C}}$$

等号は，$\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{1}{\tan C}$のとき，すなわち△ABCが正三角形のときであるから，

右辺$=3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}=\sqrt{3}$

よって，$\dfrac{1}{\tan\omega} \geqq \sqrt{3}$　$\tan\omega \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$0° < \omega < 90°$ より，$\omega \leqq 30°$ $\boxed{終}$

補足

(1)　点Pを第1ブロカール（Brocard）点という。また，∠QAC＝∠QBA＝∠QCBとなる点も求められ，こちらを第2ブロカール点という。

(2)　∠PAB＝∠QACとなり，ブロカール角という。

（2019/10/8　時岡）