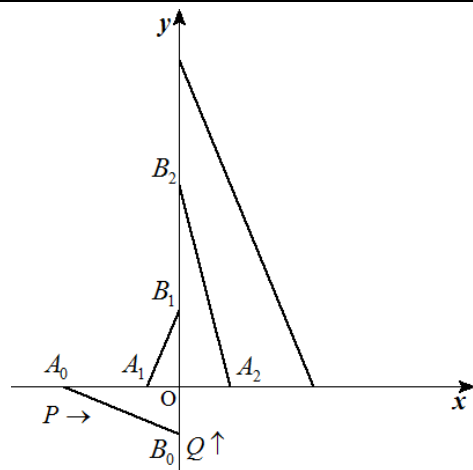


直交座標に 2 つの動点 P, Q がある。P, Q の速さの比は $p:q$ で、一定の速さで点 P は x 軸上を、点 Q は y 軸上をそれぞれ正の向きに進む。点 P, Q の初めの位置をそれぞれ A_0, B_0 , 1 秒後の位置をそれぞれ A_1, B_1 , 2 秒後の位置をそれぞれ $A_2, B_2, \dots$, n 秒後の位置をそれぞれ A_n, B_n とする。

$A_0B_0=d_0, A_1B_1=d_1, A_2B_2=d_2$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) P, Q の秒速をそれぞれ求めよ。

(2) A_nB_n を求めよ。



(解) (1) P, Q の秒速をそれぞれ pv, qv とおく。

また、 $A_0(a, 0), B_0(0, b)$ とおくと、 $A_1(a + pv, 0), B_1(0, b + qv), A_2(a + 2pv, 0), B_2(0, b + 2qv)$ となる。

仮定より、 $A_0B_0=d_0, A_1B_1=d_1, A_2B_2=d_2$ であるから、三平方の定理より

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d_0^2 \dots ① \\ (a + pv)^2 + (b + qv)^2 = d_1^2 \dots ② \\ (a + 2pv)^2 + (b + 2qv)^2 = d_2^2 \dots ③ \end{cases}$$

$$② - ① \text{ より } (p^2 + q^2)v^2 + 2pva + 2qvb = d_1^2 - d_0^2 \dots ④$$

$$③ - ① \text{ より } 4(p^2 + q^2)v^2 + 4pva + 4qvb = d_2^2 - d_0^2 \dots ⑤$$

$$⑤ - ④ \times 2 \text{ より } 2(p^2 + q^2)v^2 = d_0^2 - 2d_1^2 + d_2^2 \quad v^2 = \frac{d_0^2 - 2d_1^2 + d_2^2}{2(p^2 + q^2)} \dots ⑥$$

$$\therefore v > 0 \text{ より, } v = \frac{\sqrt{d_0^2 - 2d_1^2 + d_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$$\text{よって, P, Q の秒速はそれぞれ } \frac{p\sqrt{d_0^2 - 2d_1^2 + d_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{q\sqrt{d_0^2 - 2d_1^2 + d_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{p^2 + q^2}} \dots (\text{答})$$

(2) $A_n(a + npv, 0), B_n(0, b + nqv)$ であるから、三平方の定理より

$$A_nB_n = \sqrt{(a + npv)^2 + (b + nqv)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2nv(pa + qb) + n^2(p^2 + q^2)v^2}$$

$$① \text{ より } a^2 + b^2 = d_0^2, ④ \text{ より } 2v(pa + qb) = d_1^2 - d_0^2 - (p^2 + q^2)v^2 \text{ であるから}$$

$$A_nB_n = \sqrt{d_0^2 + n\{d_1^2 - d_0^2 - (p^2 + q^2)v^2\} + n^2(p^2 + q^2)v^2} = \sqrt{d_0^2 + n(d_1^2 - d_0^2) + (n^2 - n)(p^2 + q^2)v^2}$$

これに⑥を代入すると

$$A_nB_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(n-1)(n-2)d_0^2 - 2n(n-2)d_1^2 + n(n-1)d_2^2} \dots (\text{答})$$

$$(\text{例}) \quad p=2, q=3, d_0=3, d_1=2, d_2=5 \text{ のとき, } d_n = \sqrt{13n^2 - 18n + 9}, \quad d_9 = 30, d_{52} = 185$$