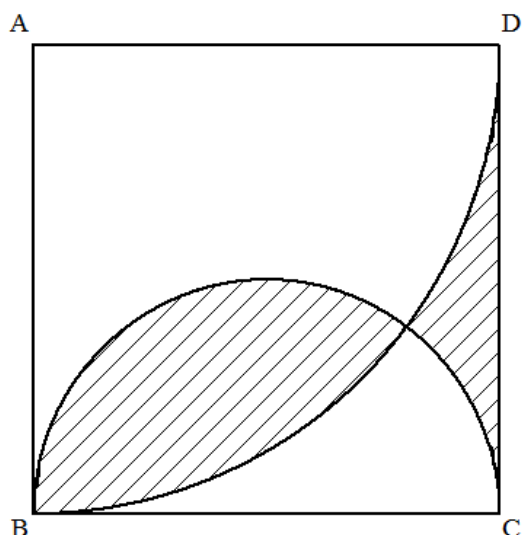


1 辺の長さが 1 である正方形 ABCD に、図のように 4 分の 1 円 ABD と BC を直径とする半円が描かれている。
斜線部分の面積を求めよ。



(解) 4 分の 1 円 ABD と BC を直径とする半円との B 以外の共有点を E とし、BC の中点を M とする。
E から CD, AB, BC に下した垂線の足をそれぞれ F, G, H とする。

$\angle BAE = \angle EMC = \theta$ とおくと、 $\angle BME = \pi - \theta$ 、 $\angle DAE = \frac{\pi}{2} - \theta$ であ

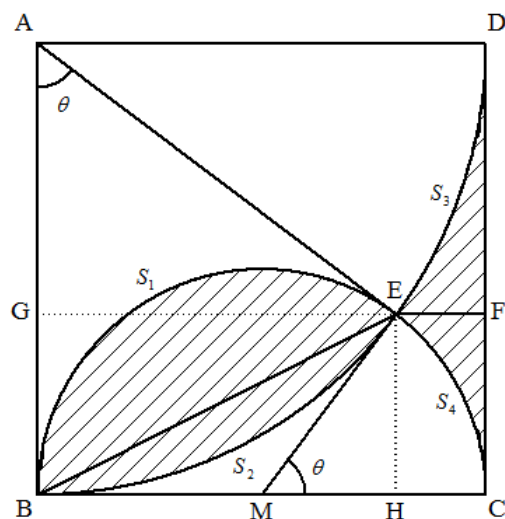
る。AG = $\cos \theta$ 、EH = $\frac{1}{2} \sin \theta$ 、AG + EH = 1 であるから

$$\cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta = 1$$

$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin \theta$ を、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると、

$$\sin \theta > 0 \text{ より、} \sin \theta = \frac{4}{5}$$

求める斜線部分の面積を、BE, EF で仕切って、図のように S_1, S_2, S_3, S_4 と 4 つに分割する。



$$S_1 = \text{扇形 MEB} - \triangle \text{MEB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\pi - \theta) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin(\pi - \theta) = \frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{8} - \frac{1}{8} \sin \theta$$

$$S_2 = \text{扇形 ABE} - \triangle \text{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \theta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$S_3 = \text{台形 EFDA} - \text{扇形 AED} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{9}{25} - \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$$

$$S_4 = \text{台形 EMCF} - \text{扇形 MCE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \theta = \frac{7}{50} - \frac{\theta}{8}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{8} - \frac{1}{8} \sin \theta\right) + \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta\right) + \left(\frac{9}{25} - \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{7}{50} - \frac{\theta}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{3}{4} \theta - \frac{5}{8} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{3}{4} \theta - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \theta - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{4} \sin^{-1} \frac{4}{5} - \frac{\pi}{8} (= 0.30277233) \cdots \text{ (答)}$$