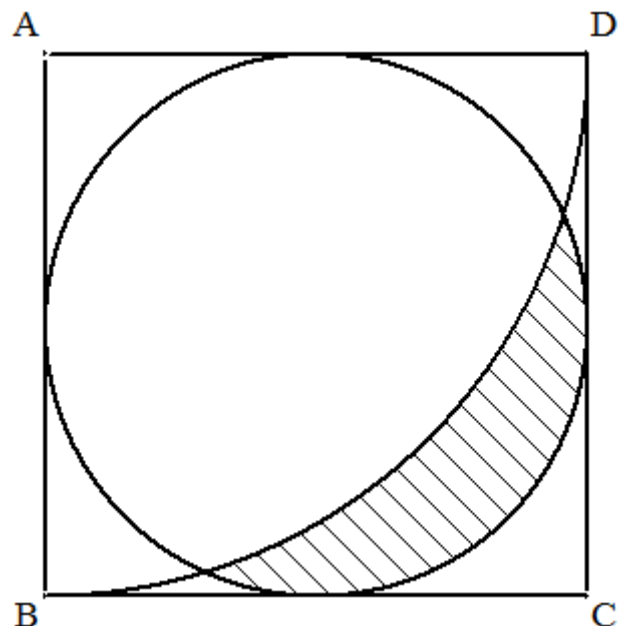


直径 1 の円に外接する正方形 ABCD 内に 4 分の 1 円 ABD が描かれている。図の斜線部分の面積を求めよ。



(解) 円 O と 4 分の 1 円 ABD の共有点を図のように、E, F とする。

△AEO の 3 辺は、AE=1, EO= $\frac{1}{2}$, OA= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

∠EOF=α, ∠EAF=β とおくと、余弦定理より

$$\cos(\angle EOA) = \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

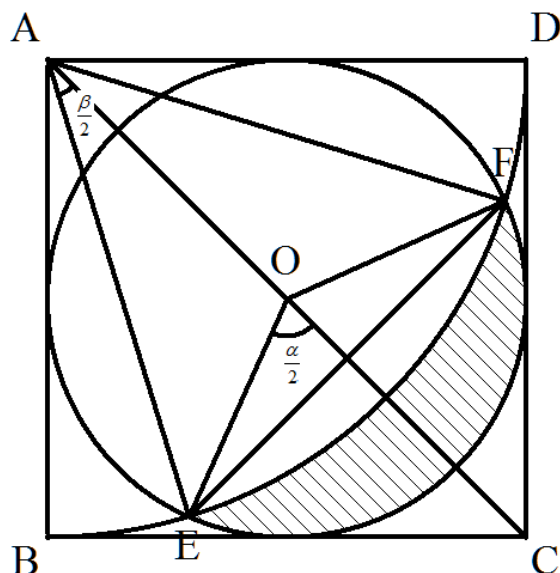
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos(\angle OAE) = \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \text{ であるから,}$$

$$\cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = 2 \left(\frac{5\sqrt{2}}{8} \right)^2 - 1 = \frac{9}{16}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

求める面積を S とおくと、S = (扇形 OEF - △OEF) - (扇形 AEF - △AEF) である。

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin \alpha \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \beta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \beta \right\} = \frac{\alpha - 4\beta}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{\sqrt{7}}{8} - \frac{4\beta - \alpha}{8}$$



ここで、 α は $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ を満たす鈍角（ラジアン）、 β は $\cos \beta = \frac{9}{16}$ を満たす鋭角（ラジアン）

更に、

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{45\sqrt{7}}{128}$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \left(\frac{9}{16} \right)^2 - 1 = -\frac{47}{128}$$

$$\sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cos 2\beta = 2 \cdot \frac{45\sqrt{7}}{128} \cdot \left(-\frac{47}{128} \right) = -\frac{2115\sqrt{7}}{8192}$$

$$\cos 4\beta = 2 \cos^2 2\beta - 1 = 2 \left(-\frac{47}{128} \right)^2 - 1 = -\frac{5983}{8192} \text{ より}$$

$$\cos(4\beta - \alpha) = \cos 4\beta \cos \alpha + \sin 4\beta \sin \alpha = -\frac{5983}{8192} \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) + \left(-\frac{2115\sqrt{7}}{8192} \right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{393}{4096}$$

$$4\beta - \alpha = \arccos \frac{393}{4096} \quad \left(= 1.4747 \div \frac{84.4942}{180} \pi \right)$$

よって

$$S = \frac{\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{8} \arccos \frac{393}{4096} \quad \cdots \text{ (答)}$$
$$\doteq 0.146381$$

(2017/1/16 時岡)