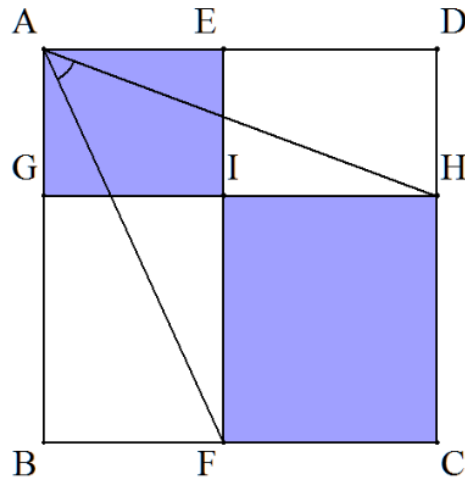


(中学生向け)

正方形ABCD内の点を通り、図のように
直角を挟む2辺に平行な線分EF, GHを引く。
長方形AGIEとIFCHの面積比が1:2である
とき、 $\angle FAH = 45^\circ$ となることを証明せよ。



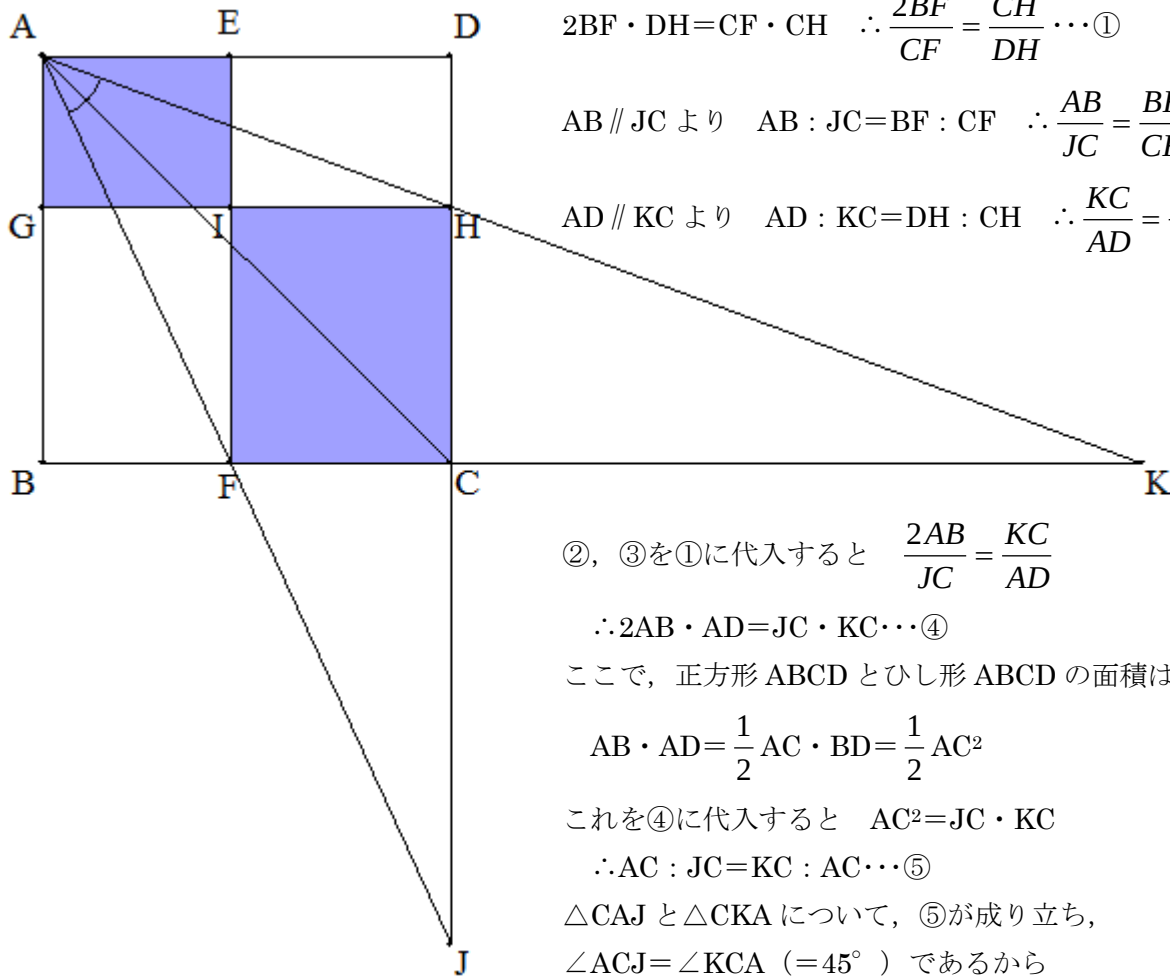
(証) AF と DC の交点を J, AH と BC の交点を K とする。

仮定より, $2(\text{長方形 AGIE}) = (\text{長方形 IFCH})$ であるから

$$2BF \cdot DH = CF \cdot CH \quad \therefore \frac{2BF}{CF} = \frac{CH}{DH} \dots \textcircled{1}$$

$$AB \parallel JC \text{ より } AB : JC = BF : CF \quad \therefore \frac{AB}{JC} = \frac{BF}{CF} \dots \textcircled{2}$$

$$AD \parallel KC \text{ より } AD : KC = DH : CH \quad \therefore \frac{KC}{AD} = \frac{CH}{DH} \dots \textcircled{3}$$



$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } \frac{2AB}{JC} = \frac{KC}{AD}$$

$$\therefore 2AB \cdot AD = JC \cdot KC \dots \textcircled{4}$$

ここで, 正方形 ABCD とひし形 ABCK の面積は等しいから

$$AB \cdot AD = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC^2$$

これを④に代入すると $AC^2 = JC \cdot KC$

$$\therefore AC : JC = KC : AC \dots \textcircled{5}$$

$\triangle CAJ$ と $\triangle CKA$ について, ⑤が成り立ち,

$\angle ACJ = \angle KCA (= 45^\circ)$ であるから

$$\triangle CAJ \sim \triangle CKA \dots \textcircled{6}$$

(2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。)

よって, $\angle FAH = \angle FAC + \angle CAH = \angle JAC + \angle CAK$

$= \angle JAC + \angle CJA$ ($\because$ ⑥より)

$= \angle ACD = 45^\circ$ ■

(2017/8/30 時岡)