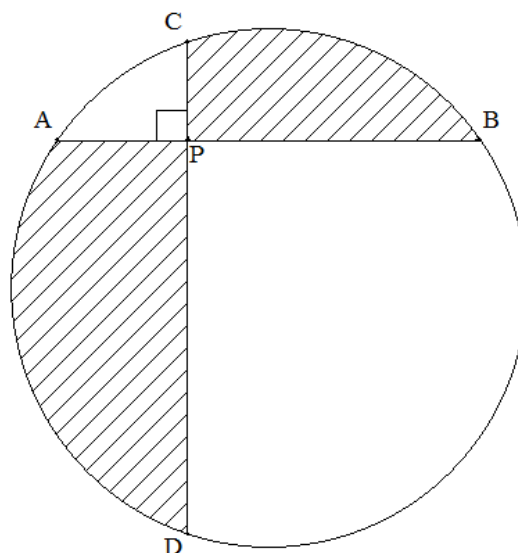


円内の点 P を通る弦 AB, CD は垂直で, $AP < BP$, $CP < DP$ とする。

$AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ のとき, 2 つの斜線部分の面積の和を求めよ。



ア図

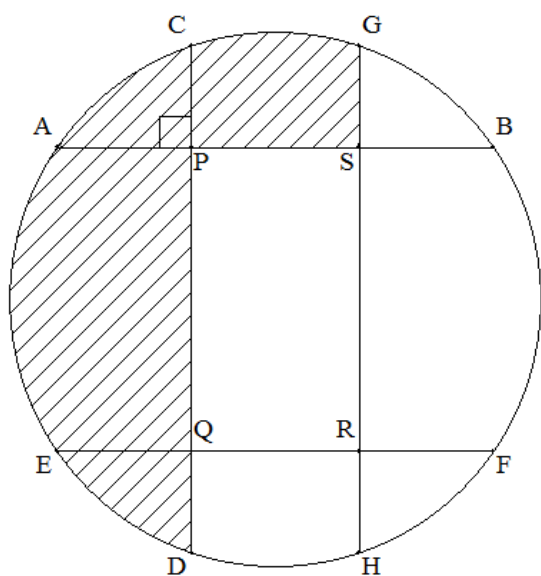
(解) CD 上に点 Q を $CP = DQ$ となるようにとり, Q を通り AB に平行な弦を EF とする。(イ図)

EF 上に点 R を $EQ = FR$ となるようにとり, R を通り CD に平行な弦を GH とする。(ウ図)

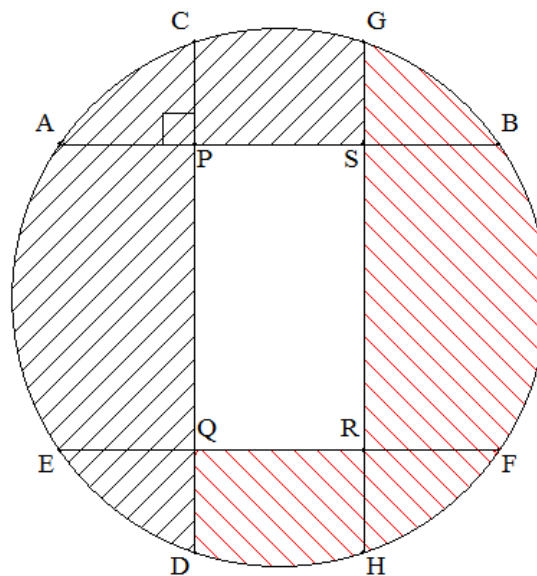
図形 GBS $\equiv$ 図形 CAP であるから, 2 つの斜線部分の面積の和 S (ア図) は, イ図の斜線で表した図形の面積に等しい。また, ウ図で, 右肩上がりの黒斜線部分と右肩下がりの赤斜線部分は合同なので面積は等しい。したがって, $2S$ と長方形 PQRS を合わせると円になることがわかる。

$$\text{よって, } S = \frac{1}{2} (\text{円} - \text{長方形 PQRS}) \cdots \textcircled{1}$$

である。



イ図



ウ図

$$\text{まず, 方べきの定理から, } ab = c \times DP \text{ より } DP = \frac{ab}{c} \text{ であるから } PQ = DP - DQ = \frac{ab}{c} - c = \frac{ab - c^2}{c}$$

$$\text{また, } PS = BP - BS = b - a \text{ より}$$

$$\text{長方形 PQRS} = \frac{ab - c^2}{c} \times (b - a) = \frac{(b - a)(ab - c^2)}{c} \cdots \textcircled{2}$$

次に, 円の半径 R を求める。これは, $\triangle ABC$ の外接円の半径と一致する。

$$\text{はじめに, 三平方の定理から } AC = \sqrt{a^2 + c^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ である。}$$

また、 $\triangle BCP$ は直角三角形であるから、 $\sin \angle PBC = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

$\triangle ABC$ で正弦定理 $2R = \frac{CA}{\sin \angle ABC}$ より、 $R = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2 \times \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}}{2c}$ であるから、

$$\text{円の面積は } \pi \left(\frac{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}}{2c} \right)^2 = \frac{\pi(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}{4c^2} \dots \textcircled{3}$$

②、③を①に代入すると

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}{4c^2} - \frac{(b-a)(ab-c^2)}{c} \right\} = \frac{\pi(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) - 4c(b-a)(ab-c^2)}{8c^2} \dots \text{(答)}$$

(2017/9/6 時岡)