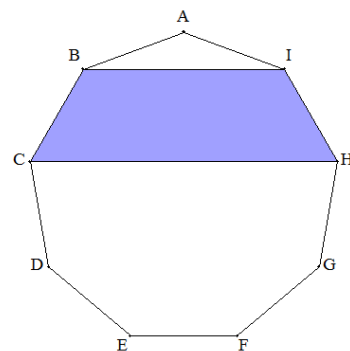


A372 (2) 正九角形ABCDEF GHIと台形BCHIの面積比が3 : 1と
なることを証明せよ。(中学生レベルで)



(証明) 台形 BCHI と台形 DCGF について、 $\angle HCG$ の二等分線に
して対称であるから、台形 BCHI=台形 DCGF である。(右図)
今この台形の面積を S とおくと、正九角形と台形 BCHI の面積比が
3 : 1 ということは、正九角形の面積=3S となる。右図で、正九角形
から 2 つの台形を引くと、残った $\triangle ABI + \triangle CGH + \triangle EFD = S$ となる
ことが証明できればよい。

「 $\triangle ABI + \triangle CGH + \triangle EFD = \text{台形 DCGF}$ 」の証明

右の下図で、CH と GI、CF と DG の交点をそれぞれ J、K とする。

正九角形の外接円の中心を O とすると、 $\angle GOH = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$

$\angle GCH = 20^\circ$ (中心角の 2 分の 1 が円周角)

(9 等分された 1 つの弧に立つ円周角は 20° である。)

[1] $\triangle CJG$ と $\triangle CFG$ について

CG は共通、 $\angle JCG = \angle FCG = 20^\circ$,

$\angle CGJ = \angle CGF = 20^\circ \times 3 = 60^\circ$

よって、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle CJG \equiv \triangle CFG$

[2] $\triangle KDF$ と $\triangle EFD$ について

$\angle KDF = \angle EFD = 20^\circ$, $\angle KFD = \angle EDF = 20^\circ$

よって、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle KDF \equiv \triangle EFD$

[3] $\triangle ABL$ と $\triangle CDM$ について

$AB = CD$, $\angle BAL = \angle DCM = 40^\circ$, $\angle ABL = \angle CDM = 20^\circ$

よって、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ABL \equiv \triangle CDM$

[4] $\triangle IAL + \triangle GHJ$ と $\triangle DMK$ について

$\triangle GHJ$ は、頂角 20° の二等辺三角形である。 $GH = GJ$, $\angle GJH = 80^\circ$

$\triangle ILA$ は、 $IA = GJ$, $\angle IAL = 100^\circ$ であるから、 $\triangle GHJ$ を $\triangle INA$ に移動する。

このとき $\angle LAN = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ より、L、A、N は一直線上にある。

$\triangle NLI$ と $\triangle DMK$ について

$NI = DK$, $\angle NIL = \angle DKM = 40^\circ$, $\angle INL = \angle KDM = 80^\circ$

よって、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle NLI \equiv \triangle DMK$

従って、 $\triangle IAL + \triangle GHJ = \triangle NLI = \triangle DMK$

よって、[1]~[4]より、 $\triangle ABI + \triangle CGH + \triangle EFD = \text{台形 DCGF}$ ■

