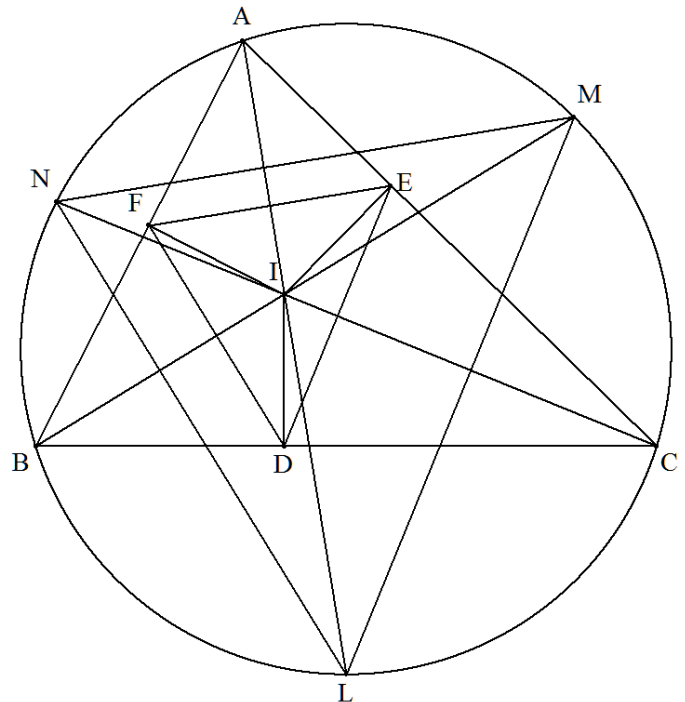


$\triangle ABC$ の内心 I から BC , CA , AB に下した垂線の足をそれぞれ D , E , F とする。また, AI , BI , CI をそれぞれ延長し, $\triangle ABC$ の外接円との交点をそれぞれ L , M , N とする。このとき, $\triangle DEF : \triangle LMN = r^2 : R^2$ となることを証明せよ。ただし, r, R はそれぞれ $\triangle ABC$ の内接円, 外接円の半径とする。



(証明) $\triangle ABC$ の内接円を描き, AC , AB と MN との交点をそれぞれ G , H とおく。

また, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の半分の角をそれぞれ $\blacktriangle$, $\circ$, $\bullet$ で表し, $\circ + \bullet = \blacksquare$ で表すと,

$$\angle NLM = \angle AGH = \angle AHG \cdots ①$$

また, $\angle FDE = \angle AEF = \angle AFE$ (接弦定理) $\cdots ②$

$\triangle AHG \sim \triangle AFE$ より, $\angle AEF = \angle AGH = \blacksquare$

よって, ①, ②より $\angle FDE = \angle NLM \cdots ③$

同様に, $\angle DEF = \angle LMN$ となるから

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$

次に, $\triangle DEF$ は $\triangle ABC$ の内接円に内接し, $\triangle LMN$

は $\triangle ABC$ の外接円に内接するので,

$\triangle DEF$ と $\triangle LMN$ の相似比は, $r : R$

従って, 面積比は, $r^2 : R^2$

$\therefore \triangle DEF : \triangle LMN = r^2 : R^2$ (終証)

(別証) $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{r}{2R}$, $\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC} = \frac{R}{2r}$ をそれぞれ計算

してもよい。後者の計算が大変である。

