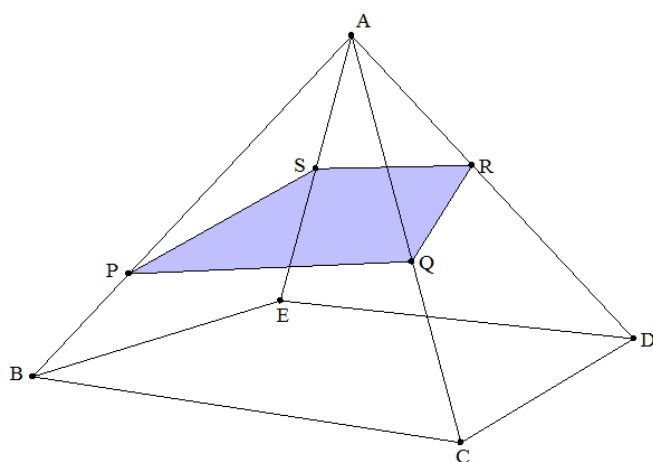


すべての辺が等しい四角錐 $A\text{-}BCDE$ とその 4 辺 AB , AC , AD , AE と交わる平面による切り口を図のように四角形 $PQRS$ とする。

$AP = p$, $AQ = q$, $AR = r$, $AS = s$ とおくとき,

(1) 四角錐 $A\text{-}PQRS$ の体積を求めよ。

(2) $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$ を証明せよ。



(1) 四角錐 $A\text{-}PQRS$ を直角二等辺三角形 ABD で切り, 2 つに分ける。切り口は直角三角形 APR となる。

点 Q , S から直角二等辺三角形 ABD に下ろした垂線の足をそれぞれ H , I とする。

$\triangle AQH$, $\triangle ASI$ はともに直角二等辺三角形になるから,

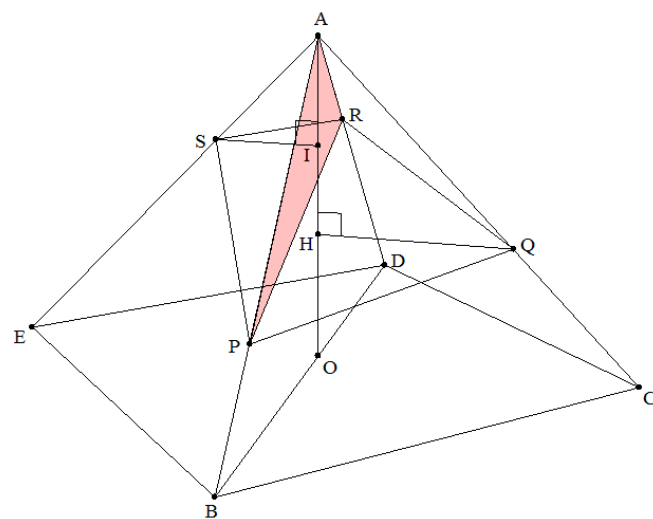
$$QH = \frac{AQ}{\sqrt{2}} = \frac{q}{\sqrt{2}}, \quad SI = \frac{AS}{\sqrt{2}} = \frac{s}{\sqrt{2}} \text{ となる。}$$

また, $\triangle APR = \frac{1}{2}pr$ であるから

$$V_{A\text{-}PQRS} = V_{Q\text{-}APR} + V_{S\text{-}APR}$$

$$= \frac{1}{3} \times \triangle APR \times QH + \frac{1}{3} \times \triangle APR \times SI$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} pr \times \frac{q}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} pr \times \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} pr(q+s) \cdots (\text{答}) \cdots (*)$$



(2) (1)と同様に, 四角錐 $A\text{-}PQRS$ を直角二等辺三角形 ACE で切り, 2 つに分ける。切り口は直角三角形 AQS となる。点 P , R から直角二等辺三角形 ACE に下ろした垂線の足をそれぞれ J , K とする。

$\triangle APJ$, $\triangle ARK$ はともに直角二等辺三角形となるから,

$$PJ = \frac{AP}{\sqrt{2}} = \frac{p}{\sqrt{2}}, \quad RK = \frac{AR}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ となる。}$$

また, $\triangle AQS = \frac{1}{2}qs$ であるから

$$V_{A\text{-}PQRS} = V_{P\text{-}AQS} + V_{R\text{-}AQS} = \frac{1}{3} \times \triangle AQS \times PJ + \frac{1}{3} \times \triangle AQS \times RK$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} qs \times \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} qs \times \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} qs(p+r)$$

この結果は(*)と同じになるから, $\frac{\sqrt{2}}{12} pr(q+s) = \frac{\sqrt{2}}{12} qs(p+r)$

両辺に $\frac{12}{\sqrt{2}pqrs}$ を掛けると, $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \quad \therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s} \quad \blacksquare$

