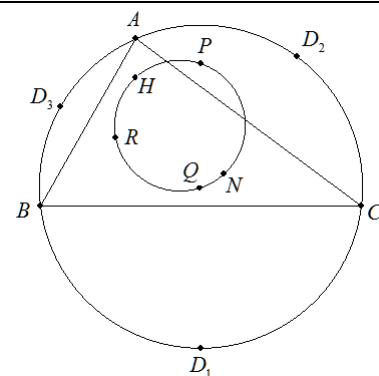


Fuhrmann 円の性質

△ABC の外接円の弧 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D_1, D_2, D_3 とし, 辺 BC, CA, AB に関する D_1, D_2, D_3 の対称点をそれぞれ P, Q, R とする。
△PQR の外接円は, △ABC の垂心 H と Nagel 点 N を直径の両端とする円であることを証明せよ。

なお, 三角形の辺と傍接円との接点と頂点をつなぐ 3 直線は 1 点で交わり, この点を Nagel 点という。また, △PQR の外接円を △ABC の Fuhrmann 円という。



(証)

△ABC の外心, 内心をそれぞれ O, I とする。

D_1P を延長し外接円との交点を E_1 , BC の中点を M_1 とする。

$$E_1P = E_1D_1 - PD_1 = 2OD_1 - 2M_1D_1$$

$$= 2(OD_1 - M_1D_1) = 2OM_1 \cdots ①$$

AO の延長と外接円との交点を F とする。

四角形 HBFC について, $BH \parallel FC, CH \parallel FB$ であるから, 四角形 HBFC は平行四辺形となる。

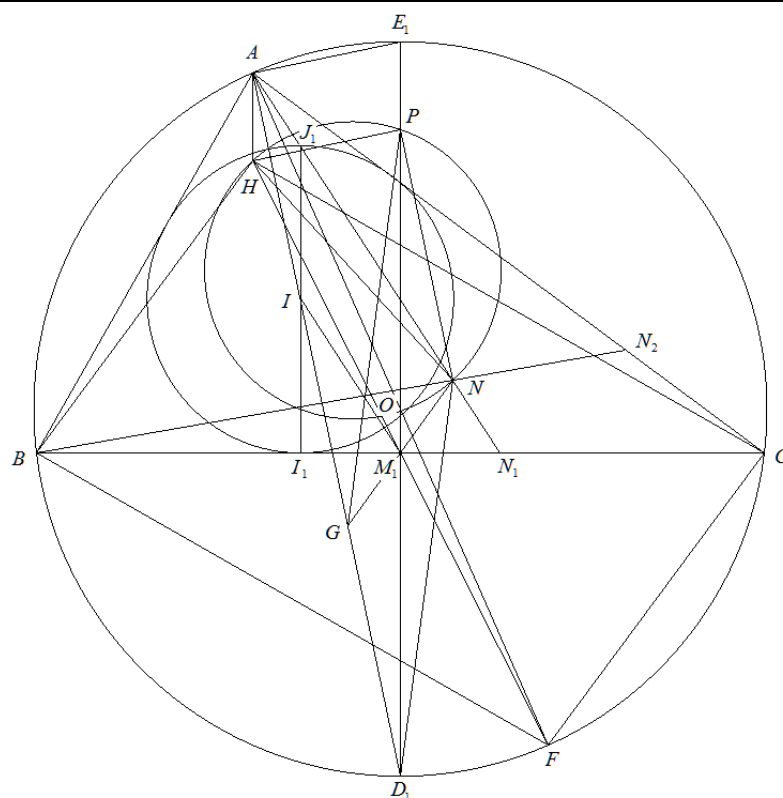
△FAH において, M_1 は, 対角線 HF の中点, O は直径 AF の中点であるから, 中点連結定理より $AH = 2OM_1 \cdots ②$

$$①, ② \text{より } AH = E_1P \cdots ③$$

また, H と P の定義より $AH \parallel E_1P \cdots ④$

③, ④より四角形 AHPE₁ は平行四辺形となるから, $AE_1 \parallel HP \cdots ⑤$

次に, AN と BC, BN と CA の交点をそれぞれ N_1, N_2 とおく。



$BN_1 = s - c, N_1C = s - b, CN_2 = s - a, N_2A = s - c$ であるから ($s = \frac{a+b+c}{2}$), メネラウスの定理より

$$\frac{AN}{NN_1} \cdot \frac{N_1B}{BC} \cdot \frac{CN_2}{N_2A} = \frac{AN}{NN_1} \cdot \frac{s-c}{a} \cdot \frac{s-a}{s-c} = \frac{AN}{NN_1} \cdot \frac{s-a}{a} = 1 \text{ より } \frac{AN}{NN_1} = \frac{a}{s-a} \therefore \frac{AN}{AN_1} = \frac{a}{s} \cdots ⑥$$

内接円と BC の接点を I_1 , I_1I の延長と内接円との交点を J_1 とする。

A は内接円と傍接円の相似の中心であるから, A, J_1, N_1 は同一直線上にある。

A から BC に下した垂線の長さを h_1 , 内接円の半径を r , $\triangle ABC = S$ とおくと,

$$\frac{J_1N_1}{AN_1} = \frac{2r}{h} = \frac{2rs}{hs} = \frac{2S}{hs} = \frac{a}{s} \cdots ⑦$$

$$⑥, ⑦ \text{より } J_1N_1 = AN \cdots ⑧$$

△ $I_1N_1J_1$ において, M_1, I はそれぞれ I_1N_1, I_1J_1 の中点であるから,

$$\text{中点連結定理より } IM_1 = \frac{1}{2} J_1N_1 = \frac{1}{2} AN \quad (\because ⑧ \text{より})$$

$$IM_1 \parallel AN \text{ より, } AD_1 \text{ と } NM_1 \text{ の交点を } G \text{ とすると, } GM_1 = M_1N \cdots ⑨$$

また, $PM_1 = M_1D_1$ より四角形 PGD_1N は平行四辺形となるから, $AD_1 \parallel PN$

$AD_1 \perp AE_1$ であるから、⑤より、 $HP \perp PN$

よって、 P は HN を直径の両端とする円周上の点となる。

Q, R についても同様に HN を直径の両端とする円周上の点となる。

以上より、 $\triangle PQR$ の外接円は、 $\triangle ABC$ の垂心とNagel点を直径の両端とする円となる。■

(2018/7/31 時岡)