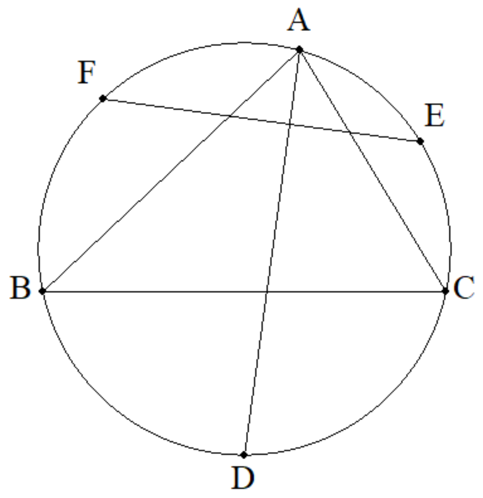
A395

△ABC において、頂点を含まない外接円の弧 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とするとき，AD⊥EF を証明せよ。



（証）△ABC の内角をそれぞれ A，B，C とすると，

A+B+C＝180°　である。

AD と EF の交点を G とする。

仮定より，AD，BE，CF は△ABC の内心 I で交わる。

三角形の 2 つの内角の和は外角に等しいから，

△ABI において，∠GIE＝∠IAB＋∠IBA＝$\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}$

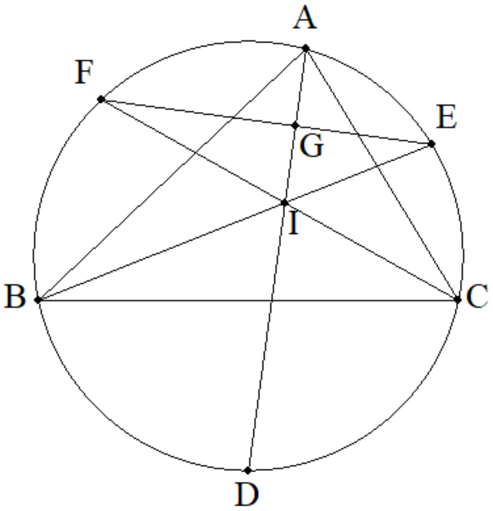
△EGI において，

∠EGA＝∠GIE＋∠IEG＝∠GIE＋∠BEF＝∠GIE＋∠BCF

（∵円周角は等しいから）

∠EGA＝$\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)+\dfrac{C}{2}=\dfrac{A+B+C}{2}=\dfrac{180°}{2}=90°$

よって，AD⊥EF である。■



（2018/8/10　時岡）

（別証）

AD と EF のなす角は弧 DF と AE の和に立つ円周角に等しい。

弧 DF と AE の和は半円に等しいから，AD と EF のなす角は 90°

よって，AD⊥EF

（2020/3/27　時岡）