(1) 平行四辺形ABCDと点Eについて，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(BE^2+DE^2-AE^2-CE^2\right)$を証明せよ。

(2) 長方形ABCDと点Eについて，$AE^2+CE^2=BE^2+DE^2$を証明せよ。

(3) AB＝4，BC＝5である平行四辺形ABCDの内部に点Eをとる。BE＝3，CE＝DE＝4のとき，AEの長さを求めよ。

（証）

(1)　図のように，点Eを通り，平行四辺形の辺に平行な線分をFG，HIとする。

また，AF＝a_1，FB＝a_2，BI＝b_1，IC＝b_2とおき，∠BCD＝θとおくと∠BAD＝$180°-\theta$である。

余弦定理より

$BE^2+DE^2-AE^2-CE^2$

$$=\left(a_2{}^2+b_1{}^2+2a_2b_1\cos\theta\right)+\left(a_1{}^2+b_2{}^2+2a_1b_2\cos\theta\right)-\left(a_1{}^2+b_1{}^2-2a_1b_1\cos\theta\right)-\left(a_2{}^2+b_2{}^2-2a_2b_2\cos\theta\right)$$
$$=2\left(a_2b_1+a_1b_2+a_1b_1+a_2b_2\right)\cos\theta$$
$$=2\left(a_1+a_2\right)\left(b_1+b_2\right)\cos\theta$$
$$=2BA\cdot BC\cos\theta$$
$$=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$$

両辺を2で割ると

$$\therefore\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BE^2+DE^2-AE^2-CE^2\right)$$　（終証）

(2)　(1)で，平行四辺形が長方形の時，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$であるから，

$BE^2+DE^2-AE^2-CE^2=0$

$\therefore AE^2+CE^2=BE^2+DE^2$　（終証）

(3) AE＝xとおく。

(1)より

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(CE^2+AE^2-BE^2-DE^2\right)=\frac{1}{2}\left(4^2+x^2-3^2-4^2\right)=\frac{x^2-9}{2}\cdots①$$

∠BCE＝α，∠DCE＝βとおくと，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\beta=\dfrac{1}{2},\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから

$$\cos(\angle BCD)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos(\angle BCD)=5\cdot4\cdot\frac{4-3\sqrt{3}}{10}=2\left(4-3\sqrt{3}\right)\cdots②$$

①，②より

$$\frac{x^2-9}{2}=2\left(4-3\sqrt{3}\right),\quad x^2=25-12\sqrt{3}$$

$x>0$より　$\therefore x=\sqrt{25-12\sqrt{3}}$

よって　AE＝$\sqrt{25-12\sqrt{3}}\cdots$（答）

（2012/3/4　時岡）