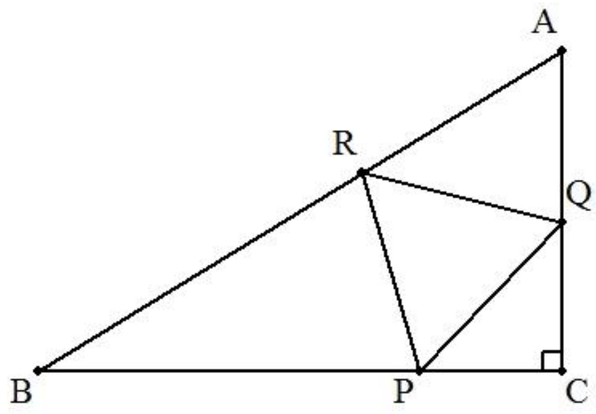
∠C＝90° の直角三角形 ABC に, 図のように 3 辺に頂点をもつ正三角形 PQR を内接させる。
BC＝a，CA＝b のとき，PQ の長さの最小値を求めよ。



（解）

PQ＝x，∠QPC＝θ とおく。

△ARQ において，

　QR＝x，QA＝$b-x\sin\theta$，∠RQA＝$\theta+30°$

△BPR において，

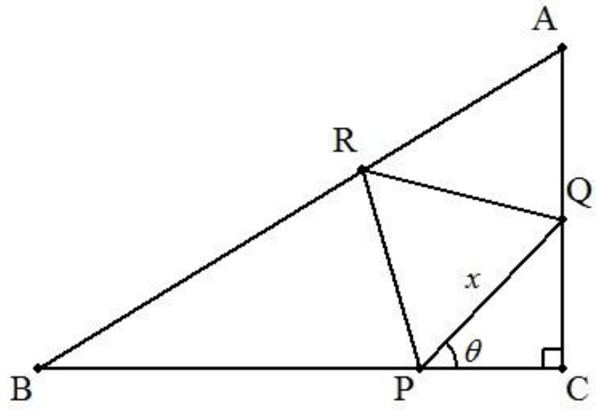
　　PR＝x，PB＝$a-x\cos\theta$，∠BPR＝$120°-\theta$

△PQR は 1 辺 x の正三角形

△QPC において，PC＝$x\cos\theta$，QC＝$x\sin\theta$

であるから，△ABC の面積を考えると，

△ARQ＋△BPR＋△PQR＋△QPC＝△ABC である。



$$\frac{1}{2}x(b-x\sin\theta)\sin(\theta+30°)+\frac{1}{2}x(a-x\cos\theta)\sin(120°-\theta)+\frac{1}{2}x^2\sin 60°+\frac{1}{2}(x\cos\theta)(x\sin\theta)=\frac{1}{2}ab$$

両辺に 2 をかけ，$\sin(120°-\theta)=\sin(\theta+60°)$ であるから，

$$bx\sin(\theta+30°)-x^2\sin\theta\sin(\theta+30°)+ax\sin(\theta+60°)-x^2\cos\theta\sin(\theta+60°)+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+x^2\sin\theta\cos\theta=ab$$

・・・①

（左辺の x^2 の係数）

$$-\sin\theta\sin(\theta+30°)-\cos\theta\sin(\theta+60°)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\cos\theta$$

$$=-\sin\theta(\sin\theta\cos 30°+\cos\theta\sin 30°)-\cos\theta(\sin\theta\cos 60°+\cos\theta\sin 60°)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\cos\theta$$

$$=-\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)-\cos\theta\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\cos\theta$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\cos\theta$$

$$=0$$

よって①は，$\{a\sin(\theta+60°)+b\sin(\theta+30°)\}x=ab$

$$\therefore x=\frac{ab}{a\sin(\theta+60°)+b\sin(\theta+30°)}$$ ・・・②

ここで，分母を変形する。

$$a\sin(\theta+60^\circ)+b\sin(\theta+30^\circ)$$
$$=a(\sin\theta\cos60^\circ+\cos\theta\sin60^\circ)+b(\sin\theta\cos30^\circ+\cos\theta\sin30^\circ)$$
$$=a\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(a+\sqrt{3}b)\sin\theta+(\sqrt{3}a+b)\cos\theta\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a+\sqrt{3}b)^2+(\sqrt{3}a+b)^2}\sin(\theta+\alpha),\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}a+b}{a+\sqrt{3}b}$$
$$=\sqrt{a^2+\sqrt{3}ab+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$\leqq\sqrt{a^2+\sqrt{3}ab+b^2}$$

（等号は，$\theta+\alpha=90^\circ, i.e. \tan\theta=\dfrac{a+\sqrt{3}b}{\sqrt{3}a+b}$ のとき）

②式より，$x=\dfrac{ab}{a\sin(\theta+60^\circ)+b\sin(\theta+30^\circ)}\geqq\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+\sqrt{3}ab+b^2}}$

よって，PQ の最小値は$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+\sqrt{3}ab+b^2}}$ ･･･（答）

【例】PQ の最小値の例

⑴　$a=4, b=3$ のとき，$x=12\sqrt{\dfrac{25-12\sqrt{3}}{193}}, \theta=42.8^\circ$

⑵　$a=\sqrt{3}, b=1$ のとき，$x=\sqrt{\dfrac{3}{7}}, \theta=30^\circ$

⑶　$a=2\sqrt{2}, b=\sqrt{3}$ のとき，$x=\dfrac{2}{7}(3\sqrt{6}-2\sqrt{3}), \theta=41.3^\circ$

（2012/3/26　時岡）