$\boxed{\text{B87}}$　$0° < \theta < 90°$のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\tan\theta = \tan 2\theta \tan 3\theta \tan 4\theta$

(2)　$\tan\theta = \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta$

（解）はじめに，$\tan\theta = \tan 3\theta \tan(30° - \theta)\tan(30° + \theta)$（公式）を証明する。

正弦と余弦の 3 倍角の公式を変形する。

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta\left(3 - 4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) = 2\sin\theta(\cos 2\theta + \cos 60°)$$

$$= 4\sin\theta\cos(\theta + 30°)\cos(\theta - 30°) = 4\sin\theta\cos(30° + \theta)\cos(30° - \theta)$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta\left(4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 3\right) = 2\cos\theta(\cos 2\theta - \cos 60°)$$

$$= -4\cos\theta\sin(\theta + 30°)\sin(\theta - 30°) = 4\cos\theta\sin(30° + \theta)\sin(30° - \theta)$$

これらより　$\tan 3\theta = \dfrac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \dfrac{4\sin\theta\cos(30°+\theta)\cos(30°-\theta)}{4\cos\theta\sin(30°+\theta)\sin(30°-\theta)} = \dfrac{\tan\theta}{\tan(30°+\theta)\tan(30°-\theta)}$

よって　$\tan\theta = \tan 3\theta \tan(30° - \theta)\tan(30° + \theta)$ ■

(1)　$\tan\theta = \tan 2\theta \tan 3\theta \tan 4\theta$と公式を比較して，次の［1］あるいは［2］を満たすθを求める。

［1］　$\tan 2\theta = \tan(30° - \theta), \tan 4\theta = \tan(30° + \theta)$

［2］　$\tan 2\theta = \tan(30° + \theta), \tan 4\theta = \tan(30° - \theta)$

［1］の場合

［1］の前式より　$2\theta = 30° - \theta + 180° \times n$（$n$は整数）　$\therefore \theta = 10° + 60° \times n$

このとき，

［1］の後式の左辺＝$\tan\{4(10° + 60° \times n)\} = \tan(40° + 60° \times n)$

［1］の後式の右辺＝$\tan\{30° + (10° + 60° \times n)\} = \tan(40° + 60° \times n)$　∴［1］の後式を満たす。

よって，［1］の場合，　$\theta = 10° + 60° \times n$が解である。

［2］の場合

［2］の前式より　$2\theta = 30° + \theta + 180° \times n$（$n$は整数）　$\therefore \theta = 30° + 180° \times n$

このとき

［2］の後式の左辺＝$\tan\{4(30° + 180° \times n)\} = \tan 120°$

［2］の後式の右辺＝$\tan\{30° - (30° + 180° \times n)\} = \tan 0°$　∴［2］の後式を満たさない。

よって，［2］の場合，解はなし。

以上，［1］，［2］より　$\theta = 10° + 60° \times n$（$n$は整数）

次に，$0° < \theta < 90°$の解を求める。

具体的に　$n = 0$とすると　$\theta = 10°$　適

$n = 1$とすると　$\theta = 70°$　適

$n = -1$とすると　$\theta = -50°$

これを(1)に代入すると　$\tan(-50°) = \tan(-100°)\tan(-150°)\tan(-200°)$

両辺に-1を掛けると　$\tan 50° = \tan 100° \tan 150° \tan 200°$

よって　$\theta = 50°$も(1)を満たす。

以上より，$0° < \theta < 90°$のとき(1)を満たすθは，

$\theta = 10°, 50°, 70°$・・・（答）

(2) $\tan\theta=\tan 3\theta\tan 5\theta\tan 7\theta$ と公式を比較して，次の［1］あるいは［2］を満たす θ を求める。

［1］ $\tan 5\theta=\tan(30°-\theta), \tan 7\theta=\tan(30°+\theta)$

［2］ $\tan 5\theta=\tan(30°+\theta), \tan 7\theta=\tan(30°-\theta)$

［1］の場合

［1］の前式より　$5\theta=30°-\theta+180°\times n$（$n$ は整数）　$\therefore\theta=5°+30°\times n$

このとき，

［1］の後式の左辺＝$\tan\{7(5°+30°\times n)\}=\tan(35°+30°\times n)$

［1］の後式の右辺＝$\tan\{30°+(5°+30°\times n)\}=\tan(35°+30°\times n)$　∴［1］の後式を満たす。

よって，［1］の場合，　$\theta=5°+30°\times n$ が解である。

［2］の場合

［2］の前式より　$5\theta=30°+\theta+180°\times n$（$n$ は整数）　$\therefore\theta=\dfrac{15°}{2}+45°\times n$

このとき

［2］の後式の左辺＝$\tan\left\{7\left(\dfrac{15°}{2}+45°\times n\right)\right\}=\tan\left(\dfrac{105°}{2}-45°\times n\right)$

［2］の後式の右辺＝$\tan\left\{30°-\left(\dfrac{15°}{2}+45°\times n\right)\right\}=\tan\left(\dfrac{15°}{2}-45°\times n\right)$　∴［2］の後式を満たさない。

よって，［2］の場合，解はなし。

以上，［1］，［2］より　$\theta=5°+30°\times n$（n は整数）

次に，$0°<\theta<90°$ の解を求める。

具体的に　$n=0$ とすると　$\theta=5°$　適

$n=1$ とすると　$\theta=35°$　適

$n=2$ とすると　$\theta=65°$　適

$n=-1$ とすると　$\theta=-25°$

これを(2)に代入すると　$\tan(-25°)=\tan(-75°)\tan(-125°)\tan(-175°)$

両辺に -1 を掛けると　$\tan 25°=\tan 75°\tan 125°\tan 175°$

よって　$\theta=25°$ も(2)を満たす。

$n=-2$ として $\theta=-55°$

これを(2)に代入すると　$\tan(-55°)=\tan(-165°)\tan(-275°)\tan(-385°)$

両辺に -1 を掛けると　$\tan 55°=\tan 165°\tan 275°\tan 385°$

よって　$\theta=55°$ も(2)を満たす。

$n=-3$ として $\theta=-85°$

これを(2)に代入すると　$\tan(-85°)=\tan(-255°)\tan(-425°)\tan(-595°)$

両辺に -1 を掛けると　$\tan 85°=\tan 255°\tan 425°\tan 595°$

よって　$\theta=85°$ も(2)を満たす。

また，$\theta=45°$ のとき，(2)の左辺＝1，(2)の右辺＝$\tan(3\times 45°)\tan(5\times 45°)\tan(7\times 45°)=(-1)\cdot 1\cdot(-1)=1$ より

$\theta=45°$ も(2)を満たす。

なお，$\theta=15°, 75°$ は(2)を満たさない。

以上より，$0°<\theta<90°$ のとき(2)を満たす θ は，

$\theta=5°, 25°, 35°, 45°, 55°, 65°, 85°$ ・・・（答）

（2013/12/28　時岡）