B32　$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=k_n$とおく。$k_1=a$，$k_2=b$，$k_3=c$のとき，$k_4$～$k_8$を$a,b,c$で表せ。

（解）

$$\alpha+\beta+\gamma=k_1=a,\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{{k_1}^2-k_2}{2}=\frac{a^2-b}{2}$$

次に，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$より　$c-3\alpha\beta\gamma=a\left(b-\dfrac{a^2-b}{2}\right)$

$$\therefore\quad \alpha\beta\gamma=\frac{a^3-3ab+2c}{6}$$

以上より，3次方程式の解と係数の関係より，

α,β,γは$t^3-at^2+\dfrac{a^2-b}{2}t-\dfrac{a^3-3ab+2c}{6}=0\cdots$①の3つの解である。

$t=\alpha$は①の解であるから，$\alpha^3-a\alpha^2+\dfrac{a^2-b}{2}\alpha-\dfrac{a^3-3ab+2c}{6}=0$

この両辺にα^nを掛けると，　$\alpha^{n+3}-a\alpha^{n+2}+\dfrac{a^2-b}{2}\alpha^{n+1}-\dfrac{a^3-3ab+2c}{6}\alpha^n=0\cdots$②

同様に$t=\beta,\gamma$も①の解であるから，$\beta^{n+3}-a\beta^{n+2}+\dfrac{a^2-b}{2}\beta^{n+1}-\dfrac{a^3-3ab+2c}{6}\beta^n=0\cdots$③

$$\gamma^{n+3}-a\gamma^{n+2}+\frac{a^2-b}{2}\gamma^{n+1}-\frac{a^3-3ab+2c}{6}\gamma^n=0\cdots④$$

②，③，④を辺々加えると

$$k_{n+3}-ak_{n+2}+\frac{a^2-b}{2}k_{n+1}-\frac{a^3-3ab+2c}{6}k_n=0$$

$$\therefore\quad k_{n+3}=ak_{n+2}-\frac{a^2-b}{2}k_{n+1}+\frac{a^3-3ab+2c}{6}k_n\cdots⑤$$

ただし，$k_3=c$，$k_2=b$，$k_1=a$である。

⑤の漸化式に，$n=1,2,3,\cdots$と代入していくと，順次，$k_4,k_5,k_6,\cdots$と求められる。結果は次のとおりである。

$k_4=\frac{1}{6}(a^4-6a^2b+3b^2+8ac)$

$k_5=\frac{1}{6}(a^5-5a^3b+5a^2c+5bc)$

$k_6=\frac{1}{12}(a^6-3a^4b-9a^2b^2+3b^3+4a^3c+12abc+4c^2)$

$k_7=\frac{1}{36}(a^7-21a^3b^2+7a^4c+21b^2c+28ac^2)$

$k_8=\frac{1}{72}(a^8-4a^6b+6a^4b^2+9b^4+16a^5c-64a^3bc+48ab^2c+32bc^2-36a^2b^3+64a^2c^2)$

（例）$k_1=1$，$k_2=2$，$k_3=3$のとき，

$$k_4=\frac{25}{6},k_5=6,k_6=\frac{103}{12},k_7\frac{221}{18},k_8=\frac{1265}{72},k_9=\frac{905}{36},k_{10}=\frac{15539}{432}$$

（2013/12/1　時岡）