

2次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ について、座標軸を原点中心に θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) だけ回転させると、 $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = c$ となったとする。

(1) 次の等式を証明せよ。[1] $A+B=a+b$, [2] $AB-H^2=ab-h^2$

(2) $H=0$ となるように、回転角 θ を定めよ。

(3) (2)で、 $2h(A-B)>0$ を証明せよ。

(解) $ax^2 + 2hxy + by^2 = c \cdots \textcircled{1}$, $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = c \cdots \textcircled{2}$ とおく。

座標軸を θ 回転させると新しい座標軸 (X 軸, Y 軸) からみて、 $\textcircled{2}$ を θ 回転させると $\textcircled{1}$ になる。

$\textcircled{2}$ 上の点 (X, Y) を θ 回転させて $\textcircled{1}$ 上の点 (x, y) となったとすると、複素平面において計算すると

$$x + yi = (X + Yi)(\cos \theta + i \sin \theta) = X \cos \theta - Y \sin \theta + (X \sin \theta + Y \cos \theta)i \text{ より}$$

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + 2h(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) + b(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 = c$$

展開して $\textcircled{2}$ と係数を比較すると

$$A = a \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta + h \sin 2\theta$$

$$2H = -2a \sin \theta \cos \theta + 2h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2b \sin \theta \cos \theta = 2h \cos 2\theta - (a-b) \sin 2\theta \cdots \textcircled{3}$$

$$B = a \sin^2 \theta - 2h \sin \theta \cos \theta + b \cos^2 \theta = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cos 2\theta - h \sin 2\theta \text{ であるから}$$

$$[1] \quad A+B=a+b \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned} [2] \quad AB-H^2 &= \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta + h \sin 2\theta \right) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cos 2\theta - h \sin 2\theta \right) - \left(h \cos 2\theta - \frac{a-b}{2} \sin 2\theta \right)^2 \\ &= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \cos 2\theta + h \sin 2\theta \right) \left(h \cos 2\theta - \frac{a-b}{2} \sin 2\theta \right) = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 - h^2 = ab - h^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(2) \quad H=0 \text{ とおくと, } \textcircled{3} \text{ より } 2h \cos 2\theta - (a-b) \sin 2\theta = 0$$

$$[i] \quad a=b \text{ のとき, } 2h \cos 2\theta = 0 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

$$[ii] \quad a \neq b \text{ のとき, } 2h \cos 2\theta = (a-b) \sin 2\theta \text{ より } \therefore \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

$$(3) \quad 2h(A-B) = 2h\{(a-b) \cos 2\theta + 2h \sin 2\theta\} = (a-b)^2 \sin 2\theta + (2h)^2 \sin 2\theta = \{(a-b)^2 + h^2\} \sin 2\theta > 0 \quad \blacksquare$$

【例】2次曲線 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$ のグラフをかけ。

(解) 座標軸を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) だけ回転させて2次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ ($a=1, b=2, c=4, h=-1$) が $Ax^2 + By^2 = 4$ …①になったとする。

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b} = \frac{-2}{1-2} = 2 = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \text{ より, } \tan \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tan \theta > 0 \text{ より } \tan \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$A+B=a+b=1+2=3, \quad AB=ab-h^2=1 \cdot 2 - (-1)^2 = 1, \quad 2h(A-B) = -2(A-B) > 0 \text{ より, } A < B$$

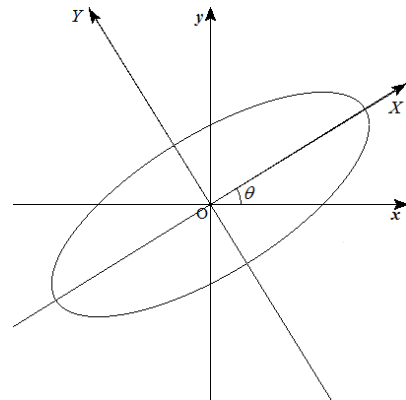
$$A, B \text{ は } t^2 - 3t + 1 = 0 \text{ の2解。 } t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$A < B \text{ であるから } A = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, B = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{このとき①は, } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} y^2 = 4$$

$$\text{変形すると } \frac{x^2}{(\sqrt{5}+1)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5}-1)^2} = 1$$

これは長軸 $2(\sqrt{5}+1)$, 短軸 $2(\sqrt{5}-1)$ の楕円であるから
グラフは右の通りとなる。



$$\text{(別解) } x^2 - 2xy + 2y^2 = 4 \text{ を } y \text{ について解くと } y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2(x^2 - 4)}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{8 - x^2}}{2}$$

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{8 - x^2}}{2}, \quad g(x) = \frac{x - \sqrt{8 - x^2}}{2} \text{ とおく。}$$

$$\text{定義域は, } 8 - x^2 \geq 0 \text{ より } -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{2} = \frac{\sqrt{8-x^2} - x}{2\sqrt{8-x^2}} = 0 \text{ とおくと, } \sqrt{8-x^2} = x \text{ より } x = 2 \text{ (} x = -2 \text{ は不適)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2\sqrt{2}} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} f'(x) = \infty \text{ であるから } x = \pm 2\sqrt{2} \text{ における接線は } y \text{ 軸に平行である。}$$

増減表をつくると

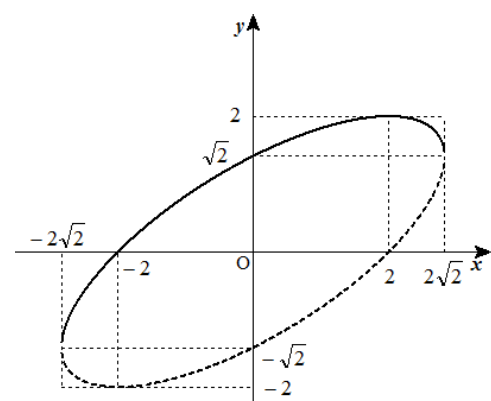
x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

よって, $y = f(x)$ のグラフは右の実線

同様に, $y = g(x)$ のグラフは右の破線

したがって, $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$ は楕円のようなグラフになる。

※実際は, 楕円になるが, それを証明するのは面倒だし, 概形ならこの程度で十分である。



(2019/5/18 時岡)