B95

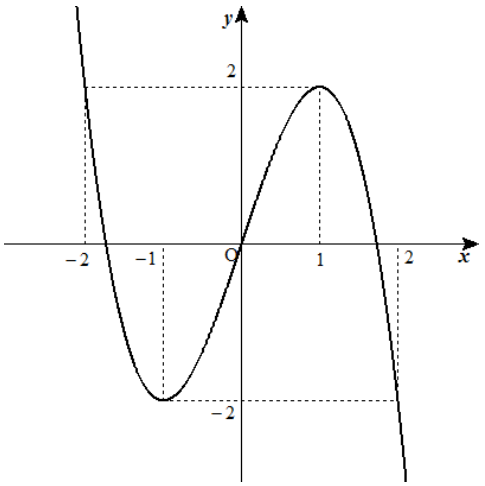
3 次関数 $y=-x^3+3x\left(a \leqq x \leqq a+1\right)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$M(a)$，$m(a)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　$M(a)-m(a)=k$ を満たす $a$ の値の個数を求めよ。

（解）$y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ |




よって，$y=f(x)=-x^3+3x$ のグラフは右図のとおりとなる。

$f(a)=-a^3+3a$，　$f(a+1)=-(a+1)^3+3(a+1)=-a^3-3a^2+2$

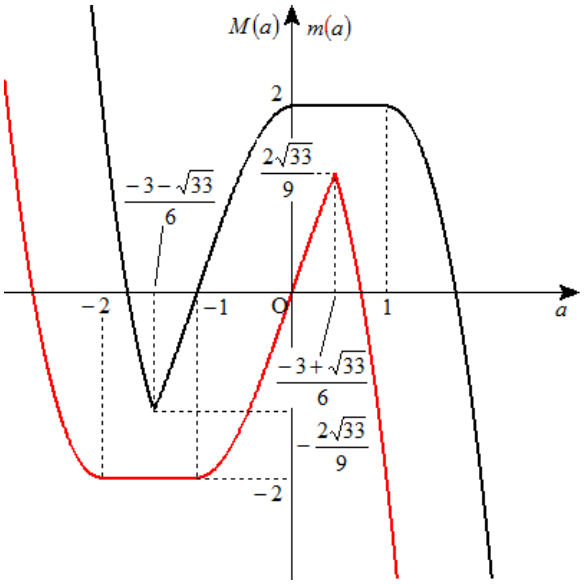
$f(a)-f(a+1)=3a^2+3a-2=0$ とおくと　$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$ であるから

$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}<a<\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}$ のとき，　$f(a)>f(a+1)$

$a \leqq \dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}, \dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \leqq a$ のとき，　$f(a) \leqq f(a+1)$

である。

$a$ の値によって，次のとおり場合分けをする。




[1]　$a \leqq -2$ のとき，$M(a)=f(a), m(a)=f(a+1)$

[2]　$-2<a \leqq \dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$ のとき，$M(a)=f(a), m(a)=-2$

[3]　$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}<a \leqq -1$ のとき，$M(a)=f(a+1), m(a)=-2$

[4]　$-1<a \leqq 0$ のとき，$M(a)=f(a+1), m(a)=f(a)$

[5]　$0<a \leqq \dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}$ のとき，$M(a)=2, m(a)=f(a)$

[6]　$\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}<a \leqq 1$ のとき，$M(a)=2, m(a)=f(a+1)$

[7]　$1<a$ のとき，$M(a)=f(a), m(a)=f(a+1)$

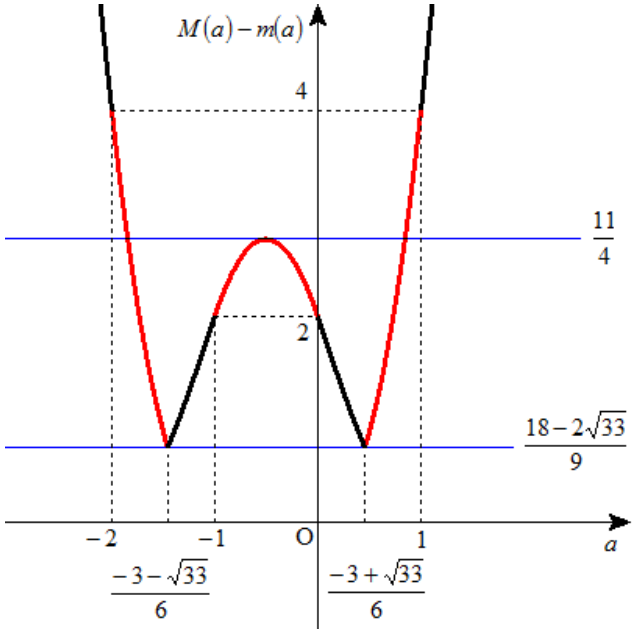
よって

$$M(a)=\begin{cases} -a^3+3a\left(a \leqq \dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \text{のとき}\right) \\ -a^3-3a+2\left(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}<a \leqq 0 \text{のとき}\right) \\ 2\left(0<a \leqq 1 \text{のとき}\right) \\ -a^3+3a\left(1<a \text{のとき}\right) \end{cases}$$

$$m(a)=\begin{cases} -a^3-3a+2\left(a \leqq -2 \text{のとき}\right) \\ -2\left(-2<a \leqq -1 \text{のとき}\right) \\ -a^3+3a\left(-1<a \leqq \dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \text{のとき}\right) \\ -a^3-3a+2\left(\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}<a \text{のとき}\right) \end{cases} \cdots \text{（答）}$$

(2)　$M(a)-m(a)$を計算すると

$$M(a)=\begin{cases}3a^2+3a-2\left(a\leqq -2\text{のとき}\right)\\ -a^3+3a+2\left(-2<a\leqq \dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}\text{のとき}\right)\\ -a^3-3a^2+4\left(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}<a\leqq -1\text{のとき}\right)\\ -3a^2-3a+2\left(-1<a\leqq 0\text{のとき}\right)\\ a^3-3a+2\left(0<a\leqq \dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}\text{のとき}\right)\\ a^3+3a^2\left(\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}<a\leqq 1\text{のとき}\right)\\ 3a^2+3a-2\left(1<a\text{のとき}\right)\end{cases}$$




よって，$M(a)-m(a)=k$ を満たす $a$ の値の個数は右のグラフより

（答）

$k<\dfrac{18-2\sqrt{33}}{9}$ のとき，　0 個

$k=\dfrac{18-2\sqrt{33}}{9},\dfrac{11}{4}<k$ のとき，　2 個

$k=\dfrac{11}{4}$ のとき，　3 個

$\dfrac{18-2\sqrt{33}}{9}<k<\dfrac{11}{4}$ のとき，　4 個

（2014/1/19　時岡）